

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۳۶ دقیقه

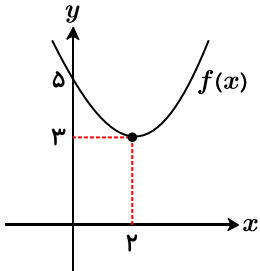
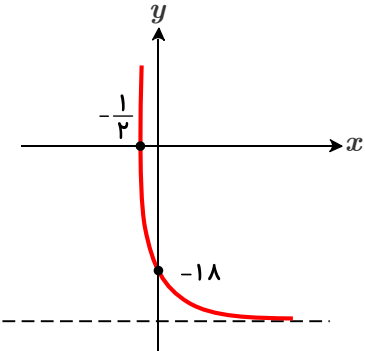


نام آزمون: حسابان ۱ (منتأزمون ۷ تشریحی - ریاضی)

تعداد صفحه: ۱۴

تاریخ آزمون:

ردیف	نمره	
۱	۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اگر در یک مستطیل به طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{W}{L} = \frac{L}{L+W}$، آنگاه در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. ب) هم‌دامنه تابع، همان برد تابع است. ج) حد تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند، برابر صفر است. د) تابع $f(x) = [x^2]$ در $x = -\sqrt{2}$ فقط پیوستگی چپ دارد.
۲	۱	جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید. الف) فاصله دو خط به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با ب) حاصل $\log_2 \sqrt{2} + \log_{10} 10 + \log_{10} 10$ برابر است با ج) حاصل $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ برابر است با د) حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x^3] - \left[\lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 \right]$ برابر است با
۳	۱.۵	در هر سؤال، گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{ x }, & x < -1 \\ 3x + b, & x > -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد داشته باشد، مقدار b کدام است؟ ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ب) اگر $\log 12 = \log x + \log(x + 1)$ باشد، در این صورت $\log_3(x + 6)$ کدام است؟ ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ج) حاصل $\cos 22.5^\circ$ کدام است؟ ۱ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲ (۲) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ ۳ (۳) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ ۴ (۴) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$
۴	۱	به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید. الف) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$، حاصل $(\frac{f}{g})(2)$ چقدر است؟ ب) طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن کمانی به اندازه ۱۵۰ درجه طی می‌کند، طول کمان طی‌شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چقدر است؟ ($\pi = 3$)
۵	۱	مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی $1, \frac{1}{1 - \sqrt{7}}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{1 + \sqrt{7}}, \dots$ را به دست آورید.
۶	۱	جوابهای معادله $x(\sqrt{x} - 4) = 16 - x$ را تعیین کنید.
۷	۱.۲۵	α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ هستند. اگر $\beta > \alpha$، حاصل عبارت $A = 4\beta^2 + 2\alpha^2$ را به دست آورید.

ردیف	نمره	
۸	۱.۲۵	توابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ را در نظر بگیرید. الف) مقدار $(f-g)(4)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $f \circ g$ را بیابید.
۹	۱.۷۵	تابع وارون تابع شکل مقابل را در محدوده x های قبل از رأس سهمی به دست آورید. 
۱۰	۱	شکل زیر نمودار تابع $f(x) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(-1)$ کدام است؟ 
۱۱	۱.۲۵	معادله زیر را حل کنید. $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 2x = 1$
۱۲	۱	حاصل عبارت $A = 8 \sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} - 8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ را به ازای $x = 15^\circ$ محاسبه کنید.
۱۳	۰.۷۵	حاصل عبارت $A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\cot 4x}{\tan x}$ را به ازای $x = \frac{\pi}{10}$ حساب کنید.
۱۴	۰.۷۵	اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ باشد، مقادیر $\sin 2x$ و $\cos 2x$ را بیابید.
۱۵	۰.۷۵	نمودار تابع $f(x) = 1 + \left \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \right $ را در بازه $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ رسم کنید.
۱۶	۱	ضابطه تابعی را بنویسید که در $x = -1$ تعریف نشده و حد نداشته باشد، سپس نمودار آن را رسم کنید.
۱۷	۱.۵	مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3}$



زمان برگزاری: ۳۶ دقیقه

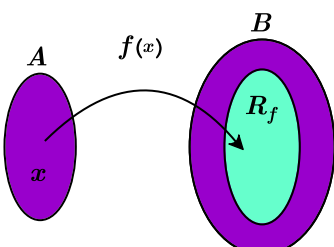
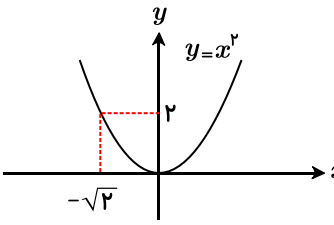
تعداد صفحه: ۱۴

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: حسابان ۱ (منتأزمون ۷ تشریحی - ریاضی)

تاریخ آزمون:

ردیف	نمره
۱۸	مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} [x] + a & , x < 0 \\ 1 + b & , x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} & , x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد.

ردیف	نمره	
۱	۱	(الف) درست؛ اگر در یک مستطیل به طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{W}{L} = \frac{L}{L+W}$ یا $\frac{L}{W} = \frac{L+W}{L}$، آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. (صفحه ۱۹ کتاب درسی) (ب) نادرست؛ مجموعه A مجموعه ابتدا و دامنه تابع بوده $(D_f = A)$ و مجموعه B مجموعه انتها و هم‌دامنه نامیده می‌شود، ولی الزاماً برابر با برد تابع نیست؛ بلکه $R_f \subseteq B$. (صفحه ۳۸ کتاب درسی)  (ج) نادرست؛ تابع در همسایگی راست نقطه $x = 2$ تعریف نشده و شرط لازم حد برقرار نیست؛ بنابراین حد ندارد. به عبارت دیگر: $f(x) = \sqrt{2x - x^2} \rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, 2] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{0^-} = \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{0^+} = 0 \end{cases}$ حد چپ دارد، ولی حد راست ندارد؛ پس در $x = 2$ حد ندارد. (صفحه ۱۲۴ کتاب درسی) (د) درست  $f(x) = [x^2] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) = [2^+] = 2$ $= f(-\sqrt{2}) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) = [2^-] = 1$ (صفحه ۱۴۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: (الف) درست (ب) نادرست (ج) نادرست (د) درست (هر مورد ۲۵/۰ نمره)
۲	۱	(الف) فاصله دو خط موازی: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{ c - c' }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (صفحه ۳۵ کتاب درسی) (ب) $\log_{10} 0.001 + \log_2 2\sqrt{2} = \log_{10} 10^{-3} + \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ (صفحه ۸۵ کتاب درسی) (ج)



ردیف	نمره	
	۱	$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{16 - 8\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = 4 - \sqrt{3} = 4 - \sqrt{3}$ (صفحه ۲۳ کتاب درسی) (د) $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x^3] - \left[\lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 \right] = [27^-] - [27] = 26 - 27 = -1$ (صفحه ۱۲۹ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) $\frac{ c - c' }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ب) صفر ج) $4 - \sqrt{3}$ د) -۱ (هر مورد ۲٫۵ نمره)
۳	۱٫۵	الف) گزینه ۲؛ با توجه به اینکه $-2 = [(-1)^-]$؛ بنابراین: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + [x]}{ x } = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2}{-x} = \frac{1 - 2}{1} = -1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} 3x + b = -3 + b \Rightarrow b = 2$ (صفحه ۱۲۹ کتاب درسی) ب) گزینه ۱؛ $\log x + \log(x + 1) = \log 12 \Rightarrow \log x(x + 1) = \log 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$ $\Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 & \text{غُوق} \\ x = 3 & \text{قُوق} \end{cases} \Rightarrow \log_3(x + 6) = \log_3 9 = 2$ (صفحه ۸۵ کتاب درسی) ج) گزینه ۳؛ $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$ $\rightarrow \cos 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ (صفحه ۱۱۲ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) گزینه ۲ ب) گزینه ۱ ج) گزینه ۳ (هر مورد ۵ نمره)
۴	۱	الف) $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2 + 4}{3(2)} = 1$ (صفحه ۶۵ کتاب درسی)



ردیف	نمره	
	۱	ب) $L = R \times Q^R \xrightarrow{150^\circ = \frac{5\pi}{6}} L = 24 \times \frac{5\pi}{6} = 24 \times \frac{5 \times 3}{6} = 60$ (صفحه ۹۶ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3(2)} = 1$ ب) $L = R \times Q^R \Rightarrow L = 24 \times \frac{5\pi}{6} = 24 \times \frac{5 \times 3}{6} = 60$ (هر مورد ۵ نمره)
۵	۱	$a_1 = \frac{1}{1+\sqrt{7}}, a_2 = \frac{-1}{6}, a_3 = \frac{1}{1-\sqrt{7}} \Rightarrow$ $2d = a_3 - a_1 = \frac{1}{1-\sqrt{7}} - \frac{1}{1+\sqrt{7}} = \frac{1+\sqrt{7}-1+\sqrt{7}}{1-7} = \frac{\sqrt{7}}{-3} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{7}}{-6}$ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}\left(2\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right) + 19\left(\frac{\sqrt{7}}{-6}\right)\right)$ $= 10\left(\frac{2(1-\sqrt{7})}{1-7} + 19\left(\frac{\sqrt{7}}{-6}\right)\right) = 10\left(\frac{2+17\sqrt{7}}{-6}\right) = \frac{-5}{3}(2+17\sqrt{7})$ (صفحه ۳ و ۴ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $a_1 = \frac{1}{1+\sqrt{7}}, a_2 = \frac{-1}{6}, a_3 = \frac{1}{1-\sqrt{7}} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2d = a_3 - a_1 = \frac{1}{1-\sqrt{7}} - \frac{1}{1+\sqrt{7}} = \frac{1+\sqrt{7}-1+\sqrt{7}}{1-7} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{7}}{-6}$ (۲۵ نمره) $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ (۲۵ نمره) $\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}\left(2\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right) + 19\left(\frac{\sqrt{7}}{-6}\right)\right)$ (۲۵ نمره) $= 10\left(\frac{2(1-\sqrt{7})}{1-7} + 19\left(\frac{\sqrt{7}}{-6}\right)\right) = 10\left(\frac{2+17\sqrt{7}}{-6}\right) = \frac{-5}{3}(2+17\sqrt{7})$ (۲۵ نمره)
۶	۱	$x - 16 = x(\sqrt{x} - 4) \Rightarrow (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4) = x(\sqrt{x} - 4)$ $\Rightarrow (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4) - x(\sqrt{x} - 4) = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4 - x) = 0$ $\begin{cases} (\sqrt{x} - 4) = 0 \Rightarrow x = 16 \\ \sqrt{x} = x - 4 \xrightarrow{x \geq 4} x^2 - 9x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 64}}{2} \xrightarrow{x \geq 4} x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$ (صفحه ۲۱ و ۲۲ کتاب درسی)



ردیف	نمره
	راهنمای تصحیح: $x - 16 = x(\sqrt{x} - 4) \Rightarrow (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4) = x(\sqrt{x} - 4)$ $\Rightarrow (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4) - x(\sqrt{x} - 4) = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4 - x) = 0 \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$ $\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{x} - 4) = 0 \Rightarrow x = 16 \text{ (نمره ۰٫۲۵)} \\ \sqrt{x} = x - 4 \xrightarrow{x \geq 4} x^2 - 9x + 16 = 0 \text{ (نمره ۰٫۲۵)} \end{array} \right.$ $\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 64}}{2} \xrightarrow{x \geq 4} x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$
۷	راه دوم: $x^2 - 4x - 2 = 0, S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$ $\xrightarrow{(\beta > \alpha)} \beta - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ $A = 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 3(\beta^2 + \alpha^2) + (\beta^2 - \alpha^2) = 3((\beta + \alpha)^2 - 2\alpha\beta) + (\beta + \alpha)(\beta - \alpha)$ $= 3(S^2 - 2P) + S \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = 3(4^2 - 2(-2)) + 4 \times 2\sqrt{6} = 60 + 8\sqrt{6}$ (صفحه ۸ و ۹ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2 + \sqrt{6}, \alpha = 2 - \sqrt{6}$ $\rightarrow A = 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 4(4\beta + 2) + 2(4\alpha + 2) = 8(2\beta + \alpha) + 12$ $= 8(2(2 + \sqrt{6}) + 2 - \sqrt{6}) + 12 = 60 + 8\sqrt{6}$ راه دوم: $x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2 + \sqrt{6} \text{ (نمره ۰٫۲۵)}, \alpha = 2 - \sqrt{6} \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$ $\rightarrow A = 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 4(4\beta + 2) + 2(4\alpha + 2) \text{ (نمره ۰٫۵)}$ $= 8(2\beta + \alpha) + 12 = 8(2(2 + \sqrt{6}) + 2 - \sqrt{6}) + 12 = 60 + 8\sqrt{6} \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$
۸	۱٫۲۵ $3(f - g)(4) = 3\left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3}\right) = -2$



ردیف	نمره	
	۱.۲۵	ب) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [3, +\infty)$ $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 4\}$ $= [3, +\infty) - \{4\}$ (صفحه ۶۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) $3(f-g)(4) = 3\left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3}\right)$ (نمره ۲.۵) $= -2$ (نمره ۲.۵) ب) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [3, +\infty)$ (نمره ۲.۵) $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 4\}$ (نمره ۲.۵) $= [3, +\infty) - \{4\}$ (نمره ۲.۵)
۹	۱.۷۵	رأس سهمی برابر با $S = (2, 3)$ است؛ بنابراین: $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 3 \Rightarrow f(0) = a(0 - 2)^2 + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$ $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3 \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2(y - 3)$ $\Rightarrow x - 2 = \sqrt{2(y - 3)} \xrightarrow[x < 2]{ x-2 = -(x-2)} -x + 2 = \sqrt{2(y - 3)} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2(y - 3)}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2(x - 3)}$ (صفحه ۶۱ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 3$ (نمره ۲.۵) $f(0) = a(0 - 2)^2 + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ (نمره ۲.۵) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$ (نمره ۲.۵) $\Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2(y - 3)$ $\Rightarrow x - 2 = \sqrt{2(y - 3)}$ (نمره ۲.۵) $\xrightarrow[x < 2]{ x-2 = -(x-2)} -x + 2 = \sqrt{2(y - 3)}$ (نمره ۲.۵) $\Rightarrow x = 2 - \sqrt{2(y - 3)} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2(x - 3)}$ (نمره ۵)
۱۰	۱	با توجه به شکل، مختصات دو نقطه $A(0, -18)$ و $B(-\frac{1}{2}, 0)$ واقع بر منحنی را در ضابطه تابع جای گذاری می کنیم:



ردیف	نمره	
	۱	$f(0) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^b = -18 \Rightarrow 3^{-b} = 3^2 \Rightarrow b = -2$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-a}{2}-2} = 0 \Rightarrow 3^{\frac{a}{2}+2} = 3^3 \Rightarrow \frac{a}{2} + 2 = 3 \Rightarrow a = 2$ $f(x) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2} \Rightarrow f(-1) = -27 + 3^4 = -27 + 81 = 54$ (صفحه ۴۷ تا ۷۶ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $f(0) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^b = -18 \Rightarrow 3^{-b} = 3^2 \Rightarrow b = -2$ (نمره ۲٫۵) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-a}{2}-2} = 0 \Rightarrow 3^{\frac{a}{2}+2} = 3^3 \Rightarrow \frac{a}{2} + 2 = 3 \Rightarrow a = 2$ (نمره ۲٫۵) $f(x) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2}$ (نمره ۲٫۵) $\Rightarrow f(-1) = -27 + 3^4 = -27 + 81 = 54$ (نمره ۲٫۵)
	۱۱	برای حل معادله فوق به شکل زیر عمل می‌کنیم: الف) با در نظر گرفتن دامنه، در صورت امکان لگاریتم‌ها را ساده کرده یا از بین می‌بریم. (گاهی لازم است ابتدا لگاریتم با مبنای مساوی ایجاد کنیم.) ب) سپس معادله حاصل را حل کرده و جواب‌های حاصل را با دامنه چک می‌کنیم. در پاره‌ای از سؤالات هم باید تغییر متغیر داد و معادله حاصل را حل کرد. $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 2x = 1 \Rightarrow 3\sqrt{\log_2 x} - (\log_2 2 + \log_2 x) = 1 \xrightarrow{\sqrt{\log_2 x} = u} 3u - (1 + u^2) = 1$ $u^2 - 3u + 2 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{\log_2 x} = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ u = \sqrt{\log_2 x} = 2 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$ (صفحه ۸۷ و ۸۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 2x = 1 \Rightarrow 3\sqrt{\log_2 x} - (\log_2 2 + \log_2 x) = 1$ (نمره ۲٫۵) $\sqrt{\log_2 x} = u \Rightarrow 3u - (1 + u^2) = 1$ (نمره ۲٫۵) $u^2 - 3u + 2 = 0$ (نمره ۲٫۵) $\Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{\log_2 x} = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ u = \sqrt{\log_2 x} = 2 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$ (نمره ۲٫۵)
	۱۲	با استفاده از فرمول‌های $\cos^2 u - \sin^2 u = \cos 2u$ و $2 \sin u \cos u = \sin 2u$ داریم:

ردیف	نمره	
۱		$A = 8 \sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} - 8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})$ $= 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x$ $\xrightarrow{x=15^\circ} A = 2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ (صفحه ۱۱۱ و ۱۱۲ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $A = 8 \sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} - 8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$ $= 4 \sin x \cos x \text{ (نمره ۰٫۲۵)} = 2 \sin 2x \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$ $\xrightarrow{x=15^\circ} A = 2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$
۱۳	۰٫۷۵	$3x + 2x = 5x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} 5x = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad 4x + x = 5x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} 5x = \frac{\pi}{2}$ زوایای $3x$ و $2x$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{10}$ متتام هستند. همچنین زوایای x و $4x$ نیز به‌ازای $x = \frac{\pi}{10}$ متتام هستند؛ بنابراین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری و سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است؛ در نتیجه داریم: $\cos 3x = \sin 2x, \cot 4x = \tan x$ $\rightarrow A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\cot 4x}{\tan x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} A = 1 + 1 = 2$ (صفحه ۹۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2x = 5x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} 5x = \frac{\pi}{2} \\ 4x + x = 5x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} 5x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \xRightarrow{\text{متتام}} \cos 3x = \sin 2x, \cot 4x = \tan x \text{ (نمره ۰٫۵)}$ $\rightarrow A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\cot 4x}{\tan x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} A = 1 + 1 = 2 \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$
۱۴	۰٫۷۵	$\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < x < \pi} \sin x = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{-\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9}$ (صفحه ۱۱۰ تا ۱۱۲ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:



ردیف	نمره	
	۰.۷۵	$\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3} \text{ (نمره ۰.۲۵)}$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{-\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{-4\sqrt{5}}{9} \text{ (نمره ۰.۲۵)}$ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9} \text{ (نمره ۰.۲۵)}$
	۰.۷۵	$f(x) = 1 + \left \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \right = 1 + \sin x $ The figure shows three graphs. The first graph is $y = \sin x$ on the interval $[0, 2\pi]$, with a peak at $\pi/2$ and a trough at $3\pi/2$. The second graph is $y = \sin x$, which is the absolute value of the first graph, with peaks at $\pi/2$ and $3\pi/2$ and troughs at $0, \pi, 2\pi$. The third graph is $f(x) = 1 + \sin x$, which is the second graph shifted up by 1 unit, with peaks at $3/2$ and troughs at 1. The x-axis for all graphs is marked with $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. The y-axis for the first graph is marked with $1, -1$, and for the others with $2, 1$. (صفحه ۱۰۰ و ۱۰۴ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $f(x) = 1 + \left \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \right = 1 + \sin x \text{ (نمره ۰.۲۵)}$

ردیف	نمره	
	۰.۷۵	در صورتی که دانش آموز مستقیماً نمودار نهایی را رسم کند، نمره کامل تعلق گیرد.
۱۶	۱	$f(x) = \frac{ x+1 }{x+1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1 \end{cases}$ تابع در $x = -1$ حد چپ و راست نابرابر دارد؛ پس در این نقطه حد ندارد. از طرفی در این نقطه تعریف نشده؛ چون $x = -1$ ریشهٔ مخرج کسر است. (صفحه ۱۲۴ و ۱۲۵ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $f(x) = \frac{ x+1 }{x+1}$ (نمره ۵) (رسم نمودار ۵ نمره) به توابع دیگری که با ذکر دلیل خواسته سؤال را برآورده می‌کند، نمره کامل تعلق گیرد.

ردیف	نمره	
۱۷	۱.۵	الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} =$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{0}{1 \times 2} = 0$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6(x - \frac{\pi}{3})} \xrightarrow{x - \frac{\pi}{3} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3} \xrightarrow{[3^+] = 3} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 18$ (صفحه ۱۴۱ تا ۱۴۴ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} =$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{0}{1 \times 2} = 0$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6(x - \frac{\pi}{3})} \xrightarrow{x - \frac{\pi}{3} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3} \xrightarrow{[3^+] = 3} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 18$ (هر مورد ۵ نمره)
۱۸	۱.۲۵	برای اینکه f در $x = 0$ پیوسته باشد، باید حدود چپ و راست در $x = 0$ موجود بوده و برابر با $f(0)$ باشند.



زمان برگزاری: ۳۶ دقیقه

تعداد صفحه: ۱۴

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: حسابان ۱ (منتأزمون ۷ تشریحی - ریاضی)

تاریخ آزمون:

ردیف	نمره
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left \sin \frac{x}{2} \right } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cancel{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \cancel{\sin \frac{x}{2}}}$ $= \frac{2 \cos(0)}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + a = [0^-] + a = -1 + a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1$ $f(0) = 1 + b = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} - 1$ (صفحه ۱۵۰ و ۱۵۱ کتاب درسی) راهنمای تصحیح: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left \sin \frac{x}{2} \right } \quad (۲۵,۰ \text{ نمره})$ $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cancel{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \cancel{\sin \frac{x}{2}}} = \frac{2 \cos(0)}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (۵,۰ \text{ نمره})$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + a = [0^-] + a = -1 + a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1 \quad (۲۵,۰ \text{ نمره})$ $f(0) = 1 + b = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} - 1 \quad (۲۵,۰ \text{ نمره})$