مجتمع آموزشی ملت

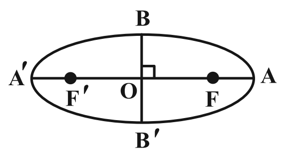
رشته ریاضی

- تست های طبقه بندی شده برای هر درس به همراه پاسخ نامه
- سوالات امتحان نهایی
- تست های کنکور سال های گذشته

هندسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی (تا پایان بیضی): صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰ — وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

پاسخ دادن به این سؤالات برای همهٔ دانش‌آموزان اجباری است.

۳۱- در بیضی زیر اگر $FA' = ۳۲$ و $BB' = ۱۶$، اندازهٔ AF کدام است؟



۱) ۸

۲) ۶

۳) ۲

۴) ۴

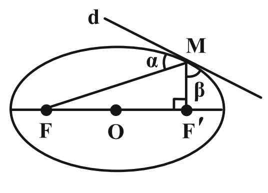
۳۲- نقطهٔ (۲ , ۱) مرکز یک بیضی افقی است و نقاط (۱ , ۳−) و (۴ , ۲) روی این بیضی قرار دارند. کدام نقطه یکی از کانون‌های این بیضی است؟

۱) (۱ , ۱−) ۲) (۱ , ۴) ۳) (۱ , ۵−) ۴) (۱ , ۶)

۳۳- BB' قطر کوچک یک بیضی و F و F' کانون‌های آن هستند. اگر $F\hat{B}F' = ۶۰^\circ$، آن‌گاه خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۳۴- در بیضی زیر $MF = ۲MF'$ و خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. $\frac{\alpha}{۲} + \frac{\beta}{۳}$ برابر کدام است؟



۱) ۴۰°

۲) ۴۵°

۳) ۵۰°

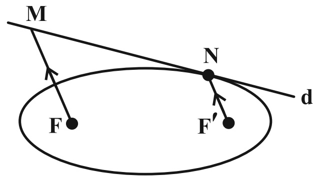
۴) ۶۰°

۳۵- از نقطهٔ M روی بیضی با کانون‌های F و F' پاره‌خط $FF' = ۸$ با زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود. اگر قطر کوچک بیضی برابر ۶ باشد، مساحت مثلث MFF' کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۶

محل انجام محاسبات

۳۶- خط d در نقطهٔ N بر بیضی مماس است و F' و F کانون‌های بیضی هستند. اگر $F'N \parallel FM$ ، $FM + F'N = ۱۰$ و $FF' = ۶$ باشد، آن‌گاه طول قطر کوچک بیضی چقدر است؟



۱) ۶

۲) $۲\sqrt{۱۰}$

۳) ۸

۴) $۶\sqrt{۲}$

۳۷- در یک بیضی به مرکز تقارن O ، اندازهٔ قطر بزرگ برابر $۴\sqrt{۳}$ و خروج از مرکز برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. دایره‌ای به مرکز O که در رأس‌های کانونی بیضی بر بیضی مماس است، رسم می‌کنیم. خطی که از کانون بیضی عمود بر محور کانونی رسم می‌شود این دایره را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند، اندازهٔ پاره‌خط PQ چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$

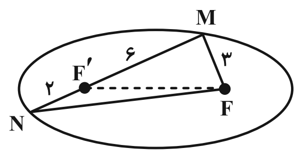
۳) ۴   ۴) ۳

۳۸- مرکز تقارن یک بیضی بر مبدأ مختصات قرار دارد. اگر نقطهٔ $F(۵, ۰)$ یکی از کانون‌های این بیضی باشد و شعاع نوری از نقطهٔ F بگذرد و به بدنهٔ بیضی در نقطهٔ $M(۳, ۲)$ بتابد، معادله پرتو بازتاب کدام است؟

۱) $x + ۴y = ۱۱$ ۲) $۴x - y = ۱۰$

۳) $۴x + y = ۱۴$ ۴) $x - ۴y = -۵$

۳۹- در بیضی شکل زیر F و F' کانون‌ها هستند و MN از کانون F' می‌گذرد. با توجه به اندازه‌های داده شده، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۰- فرض کنید خط $y = ۲$ بیضی به مرکز مبدأ مختصات، رأس $(۴, ۰)$ و کانون $(۳, ۰)$ را در نقطهٔ M قطع کند. فاصلهٔ M از دورترین کانون بیضی کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۵/۵   ۳) ۶   ۴) ۶/۵

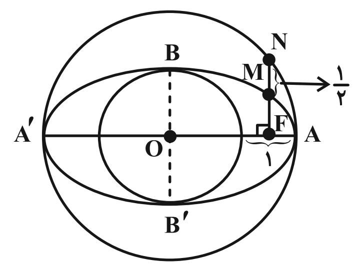
هندسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی (تا سر تبدیل معادله یک سهمی به صورت متعارف): صفحه‌های ۴۷ تا ۵۴ — وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

دانش‌آموزانی که خود را برای کنکور مرحلهٔ اول آماده می‌کنند، باید به این دسته سؤالات (پیشروی سریع) نیز، پاسخ دهند.

۴۱- اگر $A(6\sqrt{5}, 2)$ و $A'(0, 2)$ دو سر قطر بزرگ بیضی با قطر کوچک به طول ۴ باشند و دایره هم‌مرکز با بیضی و شعاع $\sqrt{41}$، بیضی را در نقطهٔ P قطع کند، مجموع مربعات فواصل P از دو کانون بیضی کدام است؟

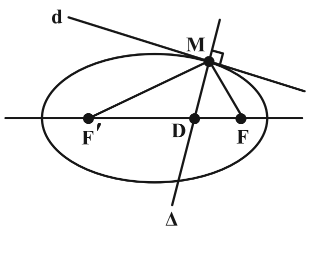
۱) ۹۰
۲) ۸۲
۳) ۱۶۴
۴) ۶۴

۴۲- در شکل زیر، O مرکز تقارن بیضی است و دو دایره به قطرهای AA' و BB' رسم شده‌اند. از نقطهٔ F، کانون بیضی، خطی عمود بر AA' رسم شده تا بیضی و دایره بزرگ‌تر را در M و N قطع کند. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۴) $\frac{3}{4}$

۴۳- در شکل زیر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. خط Δ در نقطهٔ M بر خط d عمود شده و محور کانونی بیضی را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر اندازهٔ MF، سه برابر اندازهٔ DF و اندازهٔ قطر کوچک بیضی برابر ۸ باشد، آن‌گاه اندازهٔ قطر بزرگ این بیضی چقدر است؟



۱) $6\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $6\sqrt{3}$
۴) $3\sqrt{2}$

محل انجام محاسبات

۴۴- نقاط $(1, 2)$ و $(1, -1)$ به ترتیب رأس و کانون یک سهمی هستند. معادلهٔ این سهمی کدام است؟

۱) $(y-1)^2 = 6(x-2)$
۲) $(y-1)^2 = -6(x-2)$
۳) $(y-1)^2 = 12(x-2)$
۴) $(y-1)^2 = -12(x-2)$

۴۵- نقطهٔ $(1, -1)$ رأس یک سهمی و خط $y = -\frac{3}{2}$ خط هادی آن است. این سهمی محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{3}{4}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $-\frac{1}{4}$
۴) $-\frac{1}{8}$

۴۶- M نقطه‌ای روی سهمی $(y+2)^2 = 8x$ است که از رأس سهمی و خط هادی به یک فاصله است. عرض نقطهٔ M کدام می‌تواند باشد؟ آزمون وی ای پی

۱) $2-2\sqrt{2}$
۲) $-2-\sqrt{2}$
۳) $-2+\sqrt{2}$
۴) $-2-2\sqrt{2}$

۴۷- در یک سهمی معادلهٔ محور تقارن و خط هادی به ترتیب $x = 2$ و $y = 0$ است. اگر سهمی از نقطهٔ $(4, 2)$ بگذرد معادلهٔ سهمی کدام است؟

۱) $(x-2)^2 = -4(y-1)$
۲) $(x-2)^2 = 4(y-1)$
۳) $(x+2)^2 = 4(y+1)$
۴) $(x+2)^2 = -4(y+1)$

۴۸- یک سهمی از نقطهٔ $A(-1, 2)$ می‌گذرد و کانونش نقطه‌ای در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات و روی خط $y = x-1$ است. اگر خط $y = 6$ خط هادی این سهمی باشد آن‌گاه فاصلهٔ کانون تا خط هادی کدام است؟ آزمون وی ای پی

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۴۹- یک سهمی قائم رو به پایین، محور xها را در نقاطی به طول‌های ۱- و ۷ قطع می‌کند و رأس آن روی خط $y = 2x-1$ قرار دارد. فاصلهٔ کانونی این سهمی چقدر است؟

۱) ۰/۸
۲) ۰/۶
۳) ۱/۲
۴) ۱

۵۰- مراکز دایره‌هایی که هم بر خط $x = 3$ و هم بر دایرهٔ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ مماس هستند، روی یک سهمی قرار دارند. فاصلهٔ کانون این سهمی از خط هادی چقدر است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

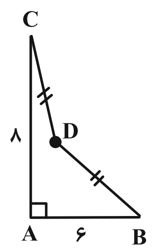
محل انجام محاسبات

هندسه ۲ : تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۳ تا ۵۸ — وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

توجه :

دانش‌آموزان گرامی: از دو مجموعه سؤال هندسه ۲ (۵۱ تا ۶۰) و هندسه ۱ (۶۱ تا ۷۰) یک مجموعه را به اختیار انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۵۱- در شکل زیر، $C\hat{D}B = 120^\circ$ بوده و D از دو رأس B و C به یک فاصله است. نقطهٔ D' طوری انتخاب شده که چهارضلعی محدب $ABD'C$ حداکثر مساحت ممکن را دارد، به‌طوری که محیط چهارضلعی $ABD'C$ با محیط چهارضلعی نامحدب ABDC برابر است. این حداکثر مساحت کدام است؟



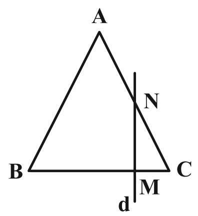
۱) $۳۲+\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۹}$

۲) $۲۴+\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴}$

۳) $۳۲+\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۱۲}$

۴) $۲۴+\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۳}$

۵۲- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۲ مفروض است. از نقطهٔ M که ضلع BC را به نسبت $\frac{۱}{۳}$ تقسیم کرده، خط d را بر BC عمود می‌کنیم. اگر بازتاب رأس C نسبت به خط d، نقطهٔ C' باشد مساحت مثلث NCC' کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

۵۳- نقاط $A(-۱ , ۴)$، $B(۴ , ۲)$، $C(n+۲ , ۰)$ و $D(n , ۰)$ مفروضند. در حالتی که محیط چهارضلعی حداقل مقدار ممکن است، مساحت آن چقدر است؟

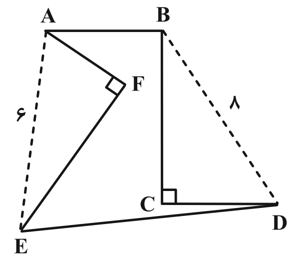
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

محل انجام محاسبات

۵۴- اگر F یک تبدیل هندسی و $F(A)$ تبدیل یافتهٔ نقطه A باشد، رابطهٔ $F(F(A)) = A$ برای کدام تبدیل، لزوماً برقرار نیست؟

۱) بازتاب
۲) دوران 180°
۳) تجانس با نسبت $k = -1$
۴) انتقال

۵۵- در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD و AEF از شش‌ضلعی زیر، نسبت طول اضلاع قائمه $\frac{1}{2}$ است. اگر بدون تغییر محیط شش‌ضلعی، مساحت آن را تا حد امکان افزایش دهیم، مساحت آن ۳ برابر می‌شود. مساحت شش‌ضلعی اولیه چقدر است؟

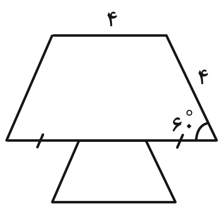


۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۳۰

۵۶- در مربع $ABCD$ به طول ضلع ۴، O مرکز مربع بوده و نقطهٔ M روی ضلع BC قرار دارد. کمترین مقدار برای مجموع فواصل M از دو نقطهٔ A و O کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۱۰}$
۳) ۶
۴) $\frac{۱۶}{۳}$

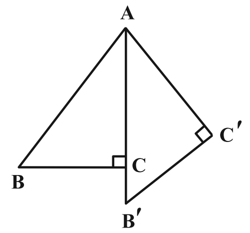
۵۷- مطابق شکل دو ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، مجانس یکدیگر با نسبت ۳ می‌باشند. اگر O مرکز تجانس باشد فاصلهٔ O تا قاعدهٔ کوچک ذوزنقهٔ کوچک‌تر کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

۵۸- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به مرکز A و به زاویه 30° دوران می‌دهیم. مطابق شکل تصویر وتر روی ضلع قائم منطبق می‌شود.

اگر طول پاره‌خط $B'C$ برابر $1+\sqrt{3}$ باشد، طول وتر AB برابر کدام است؟



۱) $6\sqrt{3}+10$

۲) $6\sqrt{3}+8$

۳) $8\sqrt{3}+6$

۴) $8\sqrt{3}+4$

۵۹- مربع $ABCD$ با طول قطر $4\sqrt{2}$ را با بردار انتقال $\overrightarrow{AB}$ انتقال داده‌ایم. فاصلهٔ رأس D تا تبدیل یافتهٔ رأس B کدام است؟

۱) 8 ۲) $4\sqrt{3}$

۳) $4\sqrt{5}$ ۴) 16

۶۰- مربع $ABCD$ را ابتدا با تجانس به مرکز C و نسبت $\frac{1}{3}$ به مربع $A'B'C'D$ و سپس با همان مرکز و نسبت $\frac{1}{2}$ به مربع $A''B''C''D''$ تصویر می‌کنیم. مساحت ناحیهٔ بین دو مربع $ABCD$ و $A''B''C''D''$ چه کسری از مساحت $ABCD$ است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{35}{36}$

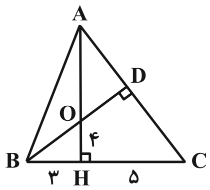
۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

محل انجام محاسبات

هندسه ۱ : قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن – چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۳۸ تا ۶۴ — وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

توجه :
دانش‌آموزان گرامی: از دو مجموعه سؤال هندسه ۲ (۵۱ تا ۶۰) و هندسه ۱ (۶۱ تا ۷۰) یک مجموعه را به اختیار انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۶۱- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BD همدیگر را در O قطع می‌کنند. طول پاره‌خط DC کدام است؟



۱) ۴/۸

۲) ۶/۴

۳) ۳/۶

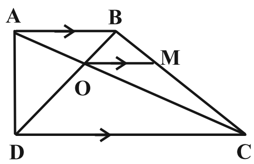
۴) ۷/۲

۶۲- اگر وسط ضلع‌های چهارضلعی ABCD با $AB = ۹$ ، $BC = ۷$ و $CD = ۲$ را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، یک مستطیل به دست می‌آید؛ طول ضلع AD کدام است؟ آزمون وی ای پی

۱) ۴   ۲) ۵

۳) ۶   ۴) ۷

۶۳- در شکل زیر از محل برخورد قطرهای ذوزنقه، خطی موازی با قاعده‌های آن رسم کرده‌ایم. اگر $S_{COD} = ۴S_{AOB}$، آن‌گاه مساحت مثلث MOC چه کسری از مساحت مثلث COD است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

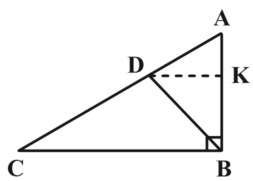
محل انجام محاسبات

۶۴- درون یک مربع به محیط ۴۲، یک مربع به محیط ۳۰ طوری محاط شده است که رئوس مربع کوچک روی اضلاع مربع بزرگ قرار گرفته است. فاصلهٔ یک رأس مربع بزرگ از نزدیک‌ترین ضلع مربع کوچک چقدر است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۴

۳) ۳/۶ ۴) ۳

۶۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، BD نیمساز زاویهٔ قائمه و $BC = ۶$ بزرگ‌ترین ضلع قائمه است. اگر طول ساق مایل در ذوزنقهٔ $BCDK$ برابر $\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}$ باشد، طول ساق قائم چقدر است؟



۱) ۳

۲) ۲/۵

۳) ۲

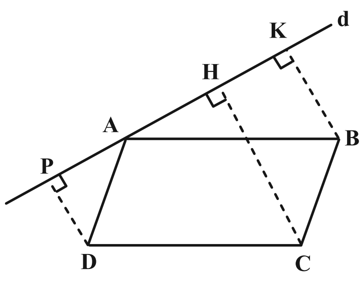
۴) ۱/۵

۶۶- مجموع تعداد قطرهای متمایز گذرا از سه رأس دوبه‌دو غیرمجاور در یک nضلعی محدب برابر ۱۸ است. با رسم قطرهای گذرنده از یک رأس این nضلعی، سطح آن به چند مثلث متمایز تقسیم می‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۷

۳) ۶ ۴) ۹

۶۷- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، خط دلخواه d از رأس A می‌گذرد. از رئوس B، C و D سه عمود بر خط d رسم می‌کنیم. اگر $BK = ۸$ و $DP = ۴$ باشد، اندازهٔ CH چقدر است؟



۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۲

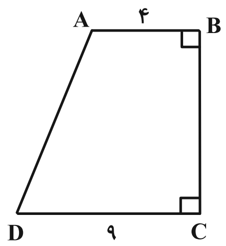
۴) ۱۴

محل انجام محاسبات

۶۸- از نقطهٔ M وسط ضلع AB از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، عمود MH را بر وتر BC رسم می‌کنیم. اگر $CH = \sqrt{3}$ و $BH = \sqrt{2}$ باشد، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

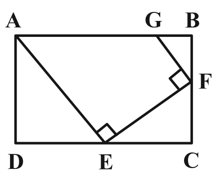
۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{5}{2}$

۶۹- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر، نقطهٔ تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی A و D روی ساق BC قرار دارد. محیط این ذوزنقه چقدر است؟



۱) ۳۸
۲) ۳۶
۳) ۲۶
۴) ۲۸

۷۰- در شکل زیر چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. اگر $DE = 12$ ، $GF = 8\sqrt{5}$ و $BF = 2FC$، آن‌گاه اندازهٔ AG کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته: گراف و مدل‌سازی (تا پایان کار در کلاس صفحهٔ ۴۷): صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷ وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

پاسخ دادن به این سؤالات برای همهٔ دانش‌آموزان اجباری است.

۷۱- برای گراف G از مرتبهٔ ۵ چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) گراف G قطعاً یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۵ عضوی دارد.

ب) هر مجموعه که شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، خود مجموعه‌ای احاطه‌گر است.

پ) اگر درجهٔ یک رأس این گراف برابر ۴ باشد هر مجموعه شامل این رأس، احاطه‌گر است.

ت) این گراف ممکن است مجموعهٔ احاطه‌گر نداشته باشد.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۷۲- فرض کنید a، b، c، d، e و f شهرهای یک استان هستند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، مطابق جدول زیر باشد. می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان راه‌اندازی کنیم به‌طوری که همهٔ شهرهای استان تحت پوشش رادیویی قرار بگیرند. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۲۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد برای این کار به حداقل چند ایستگاه رادیویی نیاز داریم؟

	a	b	c	d	e	f
a		۲۰	۴۰	۲۰	۱۵	۳۵
b	۲۰		۳۰	۳۵	۴۰	۱۲
c	۴۰	۳۰		۲۰	۵۵	۱۵
d	۲۰	۳۵	۲۰		۴۵	۳۰
e	۱۵	۴۰	۵۵	۴۵		۳۰
f	۳۵	۱۲	۱۵	۳۰	۳۰	

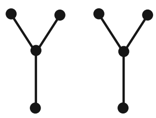
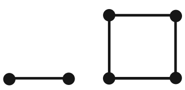
۱) ۱

۲) ۲

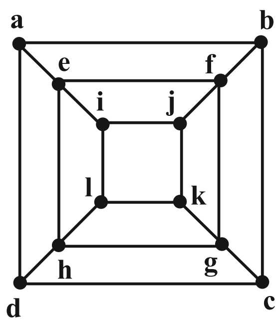
۳) ۳

۴) ۴

۷۳- در کدام گراف زیر، رابطهٔ $\gamma = \frac{p}{\Delta + 1}$ برقرار نیست؟

۱)  ۲) K_p ۳) $\overline{K_p}$ ۴) 

۷۴- عدد احاطه‌گری گراف زیر چقدر است؟



۱) ۱

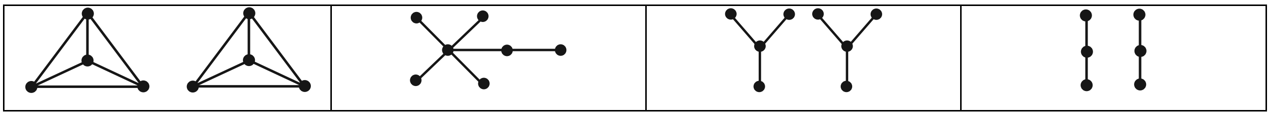
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

محل انجام محاسبات

۷۵- چند گراف از گراف‌های زیر، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا با اندازهٔ ۲ دارد؟



G_1 G_2 G_3 G_4

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۷۶- G یک گراف مرتبهٔ ۵ است که تنها دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم تک عضوی دارد. اگر این گراف کمترین تعداد یال ممکن را داشته باشد، آن‌گاه $\gamma(\bar{G})$ چقدر است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

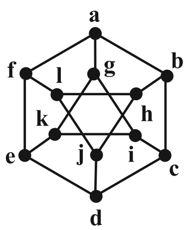
۷۷- از یکی از مجموعه‌های احاطه‌گر گراف زیر، یک رأس حذف کرده‌ایم تا مجموعهٔ A حاصل شود. مجموعهٔ A کدام <u>نمی‌تواند</u> باشد؟

۱) $\{b , c , l\}$

۲) $\{c , f , j\}$

۳) $\{e , g , i\}$

۴) $\{h , i , l\}$



۷۸- چه تعداد از مجموعه‌های زیر برای گراف زیر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال <u>نیست</u>؟

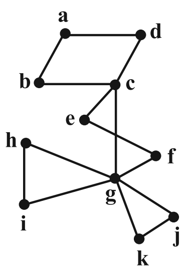
الف) $\{b , c , g\}$ ب) $\{g , e , a\}$ پ) $\{a , f , d , g\}$ ت) $\{k , i , c , f , d\}$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴



۷۹- چند گراف ساده با مجموعهٔ رأس‌های $\{a , b , c , d\}$ وجود دارد که مجموعهٔ $D = \{a\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر آن باشد؟

۱) ۱   ۲) ۴   ۳) ۸   ۴) به اندازهٔ گراف بستگی دارد.

۸۰- گراف C_4 چند زیرگراف متمایز دارد به‌طوری که هر زیرگراف فقط دارای دو $\gamma-$ مجموعهٔ متمایز باشد؟

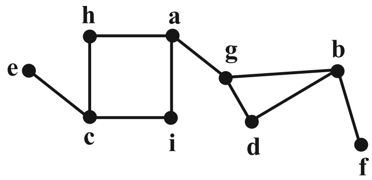
۱) ۳   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۸

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته: گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴ | وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

دانش‌آموزانی که خود را برای کنکور مرحلهٔ اول آماده می‌کنند، باید به این دسته سؤالات (پیشروی سریع) نیز، پاسخ دهند.

۸۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم است؟



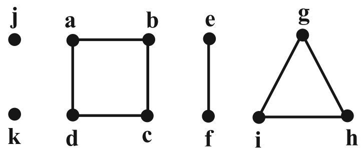
۱) {a , b , c}

۲) {a , b , d}

۳) {a , d , e , f}

۴) {a , b , c , d}

۸۲- گراف زیر چند $\gamma-$ مجموعهٔ متمایز دارد؟



۱) ۳۰

۲) ۲۴

۳) ۱۲

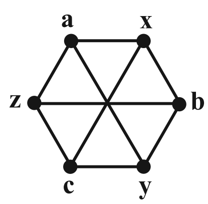
۴) ۳۶

۸۳- در یک گراف k- منتظم از مرتبهٔ ۱۷، اگر $۳ \le k \le ۸$ و در این گراف رابطهٔ $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ برقرار باشد، مجموع مقادیر ممکن برای عدد احاطه‌گری این گراف‌ها کدام است؟ (n مرتبهٔ گراف است.)

۱) ۹   ۲) ۱۱

۳) ۱۳   ۴) ۱۴

۸۴- گراف زیر چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم دارد؟



۱) ۱

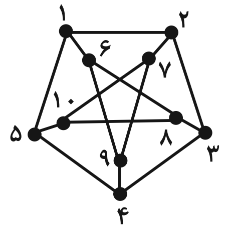
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۵- کدام مجموعه برای گراف زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال است؟



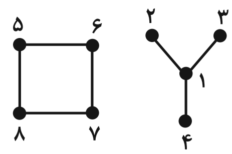
۱) {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵}

۲) {۱ , ۸ , ۹}

۳) {۱ , ۳ , ۷ , ۸}

۴) {۱ , ۳ , ۱۰ , ۹}

۸۶- گراف زیر چند مجموعهٔ احاطه‌گر دارد؟



۱) ۹۰

۲) ۹۹

۳) ۱۰۰

۴) ۱۱۰

۸۷- حداقل اندازهٔ یک گراف از مرتبهٔ ۸ با عدد احاطه‌گری ۲ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۸۸- گراف شکل زیر چند مجموعهٔ احاطه‌گر شامل رأس b دارد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰

۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۸۹- اختلاف عدد احاطه‌گری دو گراف $\overline{C}_۶$ و $\overline{C}_{۱۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

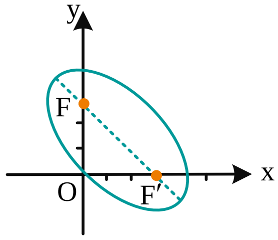
۹۰- حاصل‌ضرب درجات رأس‌های گراف G از مرتبهٔ ۶، برابر ۹۶ است. اگر این گراف دوری به طول بزرگ‌تر از ۳ نداشته باشد، دارای چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

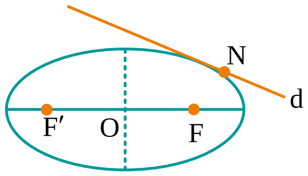
محل انجام محاسبات

۲۲- در شکل زیر، خطی در نقطهٔ F بر قطر بزرگ بیضی عمود می‌کنیم تا بیضی را در نقطه‌های M و N قطع کند. مساحت $\overset{\triangle}{MNF'}$ کدام است؟



۱) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۹\sqrt{۲}$

۲۳- در بیضی شکل زیر، مجموع فواصل هر نقطه‌ای روی بیضی از دو کانون بیضی برابر با m است. اگر خط d در نقطه N بر بیضی مماس شده باشد و خط Δ را به موازات FN به گونه‌ای رسم کنیم که از F' گذشته و خط d را در نقطه M که به فاصله n واحد از امتداد NF قرار دارد، قطع کند، مساحت چهارضلعی $MNFF'$ کدام است؟



۱) $\frac{mn}{۲}$
۲) $\frac{mn}{۴}$
۳) mn
۴) ۲mn

۲۴- در یک بیضی با طول قطر بزرگ ۲a، اگر فاصله دو کانون را برابر ۲c در نظر بگیریم و بین این دو پارامتر، رابطه $۵ac = ۲(a^۲ + c^۲)$ برقرار باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۶۲

۲۵- بیضی به مرکز $O(۵,-۳)$ بر محورهای مختصات مماس است. دایره‌ای با همین مرکز و شعاع ۴، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{MFF'}$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۶
۳) ۷/۵
۴) ۱۰

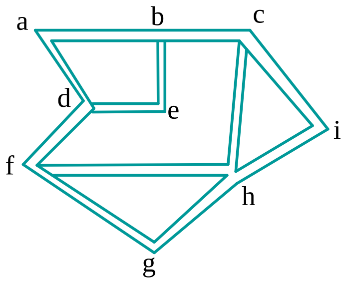
۲۶- شکل مقابل، نقشه منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی از تقاطع‌ها، دستگاه خودپرداز نصب کنیم که سه شرط زیر برقرار باشد:

الف: هر فرد یا در هر تقاطع به خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا با حداکثر رفتن به یکی از تقاطع‌های مجاورش دسترسی پیدا کند.

ب: حتماً در تقاطع e خودپرداز نصب شود.

ج: با کمترین تعداد خودپرداز، کار صورت گیرد.

این کار به چند روش انجام می‌شود؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

محل انجام محاسبات

۲۷- در جدول زیر فاصله مستقیم بین ۵ روستای a, b, c, d و e را نمایش داده‌ایم. می‌خواهیم در برخی از روستاها بیمارستان احداث کنیم که هر روستا با نزدیک‌ترین بیمارستان حداکثر ۲۵ کیلومتر فاصله داشته باشد. برای حل مسئله، گراف G را مدل‌سازی کرده‌ایم. حاصل $q(G)+\gamma(G)$ کدام است؟

	a	b	c	d	e
a	۰	۲۵	۱۰	۳۰	۲۵
b	۲۵	۰	۳۰	۸	۲۵
c	۱۰	۳۰	۰	۴۰	۵۰
d	۳۰	۸	۴۰	۰	۲۵
e	۲۵	۲۵	۵۰	۲۵	۰

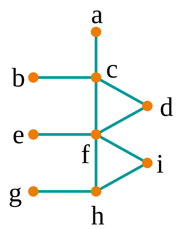
۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۶

۲۸- فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر دلخواه گراف مقابل باشد. D با کدام مجموعه می‌تواند اشتراک نداشته باشد؟



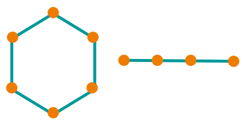
۱) $\{a, b, c, d, f\}$

۲) $\{g, h\}$

۳) $\{g, e, b, a, i\}$

۴) $\{i, h, f, e\}$

۲۹- گراف مقابل چند $\gamma-$مجموعه دارد؟



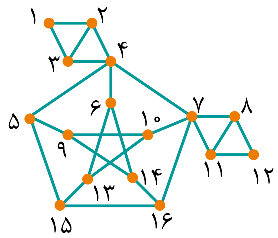
۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۴

۴) ۱۵

۳۰- کدام گزینه برای گراف مقابل، احاطه‌گر مینیمال نمی‌باشد؟



۱) {۴,۱۳,۱۴,۱۱,۱}

۲) {۴,۷,۱۶,۱۵,۵,۳,۱۲}

۳) {۵,۷,۱۳,۱۴,۶,۲,۸}

۴) {۷,۱۲,۱,۴,۱۳,۹}

۳۱- اگر بازتاب خط $2y-2x=m-1$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، بر خود خط، تصویر شود، بازتاب نقطه $A(-1,m)$ نسبت به محور yها کدام است؟

۱) (۱,−۱)   ۲) (۱,۱)   ۳) (۱,۳)   ۴) (−۱,۳)

محل انجام محاسبات

۳۲- چه تعداد از جملات زیر درست است؟

- **در دوران، مرکز دوران و در تجانس، مرکز تجانس، نقطه ثابت محسوب می‌شود.**
- **انتقال، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.**
- **در تبدیل همانی، همواره یک نقطه ثابت داریم.**
- **بردار انتقالی وجود ندارد که دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع را روی هم تصویر کند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳- تحت یک بازتاب نسبت به خط L، نقطه $(-2,1)$ روی نقطه $(3,-4)$ تصویر می‌شود. کدام نقطه روی خط L قرار دارد؟

۱) $(1,4)$ ۲) $(2,-4)$ ۳) $(0,-1)$ ۴) $(0,-2)$

۳۴- به کمک چه تعداد بردار انتقال، خط $d_1 : x-2y=3$ به خط $d_2 : 4y-2x=5$ تبدیل می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) چنین بردار انتقالی وجود ندارد.

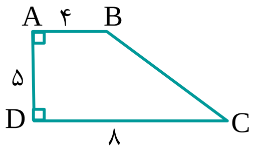
۳۵- دایره‌ای به شعاع ۳ را به کمک بردار انتقالی به طول ۵، انتقال می‌دهیم. اگر خط المرکزین دو دایره را رسم و از مراکز دو دایره، به نقطه تماس مماس مشترک خارجی و دایره‌ها وصل کنیم، یک چهارضلعی ایجاد می‌شود. مساحت آن کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۳۶- مستطیل زیر را در نظر بگیرید. چند نقطه می‌توان داخل صفحه این مستطیل در نظر گرفت که در تجانس نسبت به آن نقطه، ضلع BC تصویر ضلع AD و ضلع CD تصویر ضلع AB شود؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

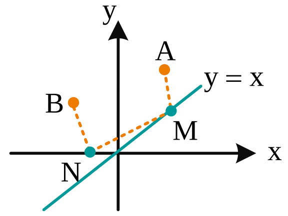
۳۷- استخری به شکل ذوزنقه، مطابق شکل زیر می‌باشد. شخصی از نقطه B می‌خواهد به نقطه‌ای مانند M روی ساق AD به طول ۵ برود و سپس تا نقطه C شنا کند. کمترین طول BMC کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

محل انجام محاسبات

۳۸- نقاط $A(2,5)$ و $B(-3,2)$ را در صفحه مختصات مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر نقطه M روی نیمساز ربع ۱ و ۳ و نقطه N روی محور xها بلغزد، طول کوتاه‌ترین مسیر $AMNB$ کدام است؟



۱) $4\sqrt{5}$

۲) 4

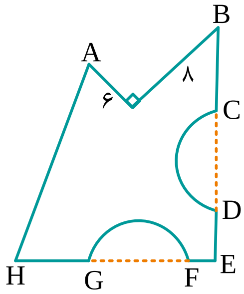
۳) $\sqrt{29}$

۴) 8

۳۹- اگر نقاط A و B یک‌بار به فاصله‌های ۱۲ و ۸ از خط d و در دو طرف آن و بار دیگر در یک سمت خط d قرار داشته باشند و بدانیم فاصله پای عمود آن‌هاروی خط d از هم برابر ۸ است و نقطه M نقطه‌ای متغیر روی خط d است. حداکثر مقدار $|MA-MB|$ در حالت اول و دوم کدام است؟

۱) $20, 16$ ۲) $4\sqrt{5}, 4\sqrt{5}$ ۳) $4\sqrt{5}, 4\sqrt{13}$ ۴) $17, 4\sqrt{13}$

۴۰- در شکل زیر، $AB=CD=2FG$ و CD و FG نیم‌دایره هستند. اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر است؟



۱) $48+30\pi$

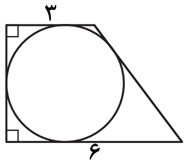
۲) $24+15/75\pi$

۳) $24+62/5\pi$

۴) $48+31/25\pi$

محل انجام محاسبات

۲۲- در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، دایره‌ای محاط شده است. اگر اندازهٔ قاعده‌های ذوزنقه ۳ و ۶ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی کدام است؟



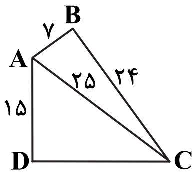
۱) $\sqrt{۶}$

۲) ۲

۳) ۳

۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۳- در شکل روبه‌رو، ABCD یک چهارضلعی محاطی است. از نظر عددی، مساحت آن چند برابر شعاع دایرهٔ محیطی آن است؟



۱) ۱۶/۲۵

۲) ۱۸/۷۲

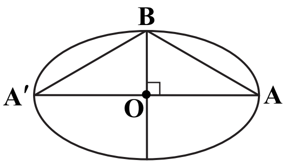
۳) ۱۶/۴۵

۴) ۱۸/۷۵

۲۴- نقاط $F'(۱,۳)$ و $F(۹,۳)$ کانون‌های یک بیضی‌اند که نقطهٔ $B(۵,۶)$ یکی از رئوس ناکانونی آن است. طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

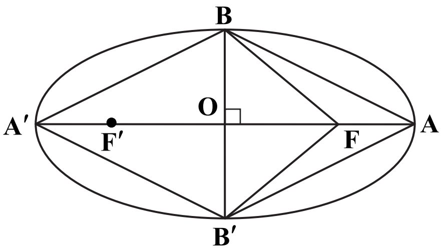
۲۵- در بیضی شکل روبه‌رو $A'\hat{B}A = ۱۲۰^\circ$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۲۶- در بیضی شکل روبه‌رو، مساحت چهارضلعی محدب $A'BFB'$ چهار برابر مساحت چهارضلعی مقعر $ABFB'$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۵}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۷- خط $۷y + ۳x = ۲۱$ محورهای مختصات را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. معادلهٔ دایره‌ای که AB قطر آن باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۳x - ۷y = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۷x - ۳y = ۰$

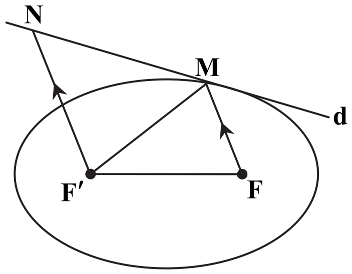
۳) $x^۲ + y^۲ - ۷x - ۳y = ۵۸$ ۴) $x^۲ + y^۲ - ۳x - ۷y = ۵۸$

محل انجام محاسبات

۲۸- شعاع دایرهٔ کوچک‌تری که از دو نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(۳,۰)$ می‌گذرد و بر خط $x=-۱$ مماس است، کدام است؟

۱) $۴-۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۵-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

۲۹- در بیضی با خروج از مرکز $\frac{۳}{۵}$، طول قطر کوچک بیضی برابر ۲۴ است. خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است و $MF \parallel NF'$ و $MN=۲۰$. محیط چهارضلعی $MNF'F$ کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۲
۳) ۶۴
۴) ۶۸

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

ریاضیات گسسته: فصل ۲ درس ۱ و درس ۲ تا ابتدای معرفی یک نماد (صفحهٔ ۴۷) ■ آمار و احتمال: فصل ۳

۳۰- میانگین وزن‌دار داده‌های جدول روبه‌رو کدام است؟

داده‌ها	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
فراوانی نسبی	۰/۱۵	a	۰/۲۵	۰/۳	۰/۱

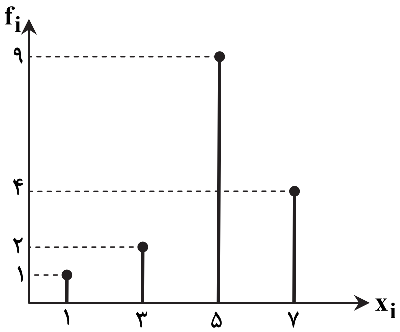
۱) ۱۳/۵ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۴/۵

۳۱- در جدول فراوانی زیر، اگر میانگین داده‌ها ۱۸/۴ باشد، در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به دادهٔ ۲۷ چند درجه است؟

نشان دسته	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
فراوانی	۳	۴	۷	۵	x

۱) ۱۸ ۲) ۲۲ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

۳۲- با توجه به نمودار روبه‌رو، انحراف معیار و میانهٔ داده‌ها به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ و ۵
۲) $\sqrt{۳}$ و ۵/۵
۳) $\sqrt{۲/۵}$ و ۵
۴) $\sqrt{۲/۵}$ و ۵/۵

محل انجام محاسبات

۳۳- ضریب تغییرات هفت دادهٔ ۱۴، پنج دادهٔ ۱۰ و چهار دادهٔ ۱۱، تقریباً کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۱۳ ۴) ۰/۱۴

۳۴- اگر در گراف G، $p = 11$ و $\sigma = 5$ باشد، حداقل اندازهٔ گراف G کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۰ ۴) ۲۸

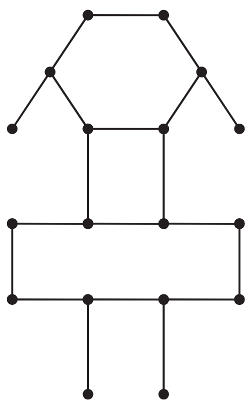
۳۵- اگر $V(G) = \{a,b,c,d,e\}$ باشد، چند گراف با اندازهٔ ۴ وجود دارد که درجهٔ رأس b برابر ۲ باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۵ ۳) ۹۰ ۴) ۸۵

۳۶- در گرافی با درجهٔ رأس‌های ۴,۴,۵,۵,۵,۵,۵، چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۲۰

۳۷- در گراف شکل روبه‌رو، مقدار γ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۷
۳) ۶
۴) ۴

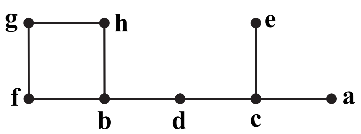
۳۸- در یک دانشگاه؛ «بهروز با شهروز و افروز و پیروز هم‌کلاس است»، «پیروز با بهروز و بهزاد هم‌کلاس است»، «افروز با بهروز و بهزاد هم‌کلاس است» و نیز «شهرزاد با شهروز هم‌کلاس است». حداقل چند نفر برای عضویت در شورای صنفی دانشگاه انتخاب کنیم تا همهٔ آن‌ها یا خودشان عضو شورا باشند یا حداقل یک هم‌کلاسی در شورا داشته باشند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۹- عدد احاطه‌گری گراف G از مرتبهٔ ۵ برابر ۲ است. اگر G همبند باشد، بیشترین اندازهٔ آن کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

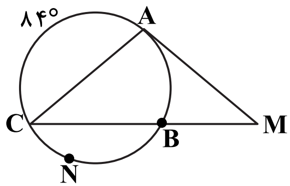
۴۰- گراف شکل روبه‌رو، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد که شامل رئوس a و b باشند؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

محل انجام محاسبات

۱۹- در شکل روبه‌رو، طول مماس MA با وتر AC برابر است. اگر اندازهٔ کمان $\widehat{AC}$ برابر با 84° درجه باشد، اندازهٔ کمان $\widehat{BNC}$ کدام است؟



۱) 192°

۲) 282°

۳) 276°

۴) 234°

۲۰- در مثلثی با اضلاع ۱۰، ۶ و ۸، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی تا دورترین رأس مثلث کدام است؟

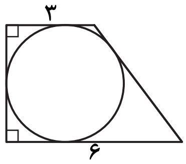
۱) $\sqrt{10}$　　۲) $3\sqrt{2}$　　۳) $2\sqrt{10}$　　۴) $6\sqrt{2}$

۲۱- دو دایره به شعاع واحد، هرکدام از مرکز دیگری گذشته است. اگر وتر مشترک آن‌ها را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، طول مماسی که از نقطهٔ حاصل بر یکی از دایره‌ها رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۲　　۲) $\sqrt{6}$　　۳) ۴　　۴) $2\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات

۲۲- در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، دایره‌ای محاط شده است. اگر اندازهٔ قاعده‌های ذوزنقه ۳ و ۶ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی کدام است؟



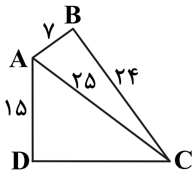
۱) $\sqrt{۶}$

۲) ۲

۳) ۳

۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۳- در شکل روبه‌رو، ABCD یک چهارضلعی محاطی است. از نظر عددی، مساحت آن چند برابر شعاع دایرهٔ محیطی آن است؟



۱) ۱۶/۲۵

۲) ۱۸/۷۲

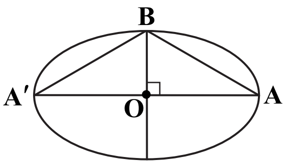
۳) ۱۶/۴۵

۴) ۱۸/۷۵

۲۴- نقاط $F'(۱,۳)$ و $F(۹,۳)$ کانون‌های یک بیضی‌اند که نقطهٔ $B(۵,۶)$ یکی از رئوس ناکانونی آن است. طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۶

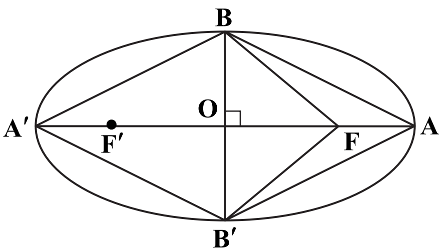
۲۵- در بیضی شکل روبه‌رو $A'\hat{B}A = ۱۲۰^\circ$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　　۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۲۶- در بیضی شکل روبه‌رو، مساحت چهارضلعی محدب $A'BFB'$ چهار برابر مساحت چهارضلعی مقعر $ABFB'$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۵}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۷- خط $۷y + ۳x = ۲۱$ محورهای مختصات را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. معادلهٔ دایره‌ای که AB قطر آن باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۳x - ۷y = ۰$　　۲) $x^۲ + y^۲ - ۷x - ۳y = ۰$

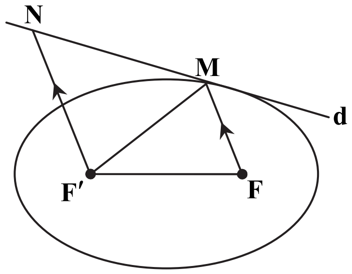
۳) $x^۲ + y^۲ - ۷x - ۳y = ۵۸$　　۴) $x^۲ + y^۲ - ۳x - ۷y = ۵۸$

محل انجام محاسبات

۲۸- شعاع دایرهٔ کوچک‌تری که از دو نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(۳,۰)$ می‌گذرد و بر خط $x=-۱$ مماس است، کدام است؟

۱) $۴-۲\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۵-۲\sqrt{۲}$
۴) $۱+\sqrt{۲}$

۲۹- در بیضی با خروج از مرکز $\frac{۳}{۵}$، طول قطر کوچک بیضی برابر ۲۴ است. خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است و $MF \parallel NF'$ و $MN = ۲۰$.
محیط چهارضلعی $MNF'F$ کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۲
۳) ۶۴
۴) ۶۸

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

ریاضیات گسسته: فصل ۲ درس ۱ و درس ۲ تا ابتدای معرفی یک نماد (صفحهٔ ۴۷) ■ آمار و احتمال: فصل ۳

۳۰- میانگین وزن‌دار داده‌های جدول روبه‌رو کدام است؟

داده‌ها	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
فراوانی نسبی	۰/۱۵	a	۰/۲۵	۰/۳	۰/۱

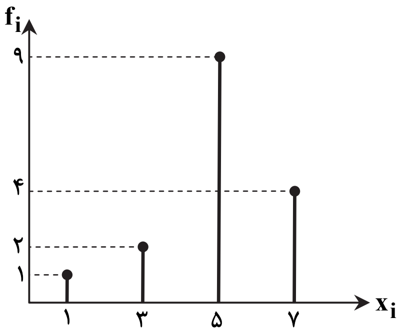
۱) ۱۳/۵
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۴/۵

۳۱- در جدول فراوانی زیر، اگر میانگین داده‌ها ۱۸/۴ باشد، در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به دادهٔ ۲۷ چند درجه است؟

نشان دسته	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
فراوانی	۳	۴	۷	۵	x

۱) ۱۸
۲) ۲۲
۳) ۳۰
۴) ۴۵

۳۲- با توجه به نمودار روبه‌رو، انحراف معیار و میانهٔ داده‌ها به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ و ۵
۲) $\sqrt{۳}$ و ۵/۵
۳) $\sqrt{۲/۵}$ و ۵
۴) $\sqrt{۲/۵}$ و ۵/۵

محل انجام محاسبات

۳۳- ضریب تغییرات هفت دادهٔ ۱۴، پنج دادهٔ ۱۰ و چهار دادهٔ ۱۱، تقریباً کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۱۳ ۴) ۰/۱۴

۳۴- اگر در گراف G، $p = 11$ و $\sigma = 5$ باشد، حداقل اندازهٔ گراف G کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۰ ۴) ۲۸

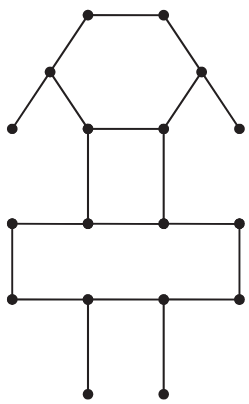
۳۵- اگر $V(G) = \{a,b,c,d,e\}$ باشد، چند گراف با اندازهٔ ۴ وجود دارد که درجهٔ رأس b برابر ۲ باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۵ ۳) ۹۰ ۴) ۸۵

۳۶- در گرافی با درجهٔ رأس‌های ۴, ۴, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵، چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۲۰

۳۷- در گراف شکل روبه‌رو، مقدار γ کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴

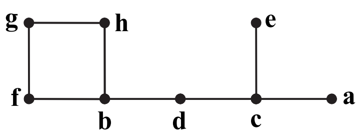
۳۸- در یک دانشگاه؛ «بهروز با شهروز و افروز و پیروز هم‌کلاس است»، «پیروز با بهروز و بهزاد هم‌کلاس است»، «افروز با بهروز و بهزاد هم‌کلاس است» و نیز «شهرزاد با شهروز هم‌کلاس است». حداقل چند نفر برای عضویت در شورای صنفی دانشگاه انتخاب کنیم تا همهٔ آن‌ها یا خودشان عضو شورا باشند یا حداقل یک هم‌کلاسی در شورا داشته باشند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۹- عدد احاطه‌گری گراف G از مرتبهٔ ۵ برابر ۲ است. اگر G همبند باشد، بیشترین اندازهٔ آن کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۴۰- گراف شکل روبه‌رو، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد که شامل رئوس a و b باشند؟



۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال: ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۹، آمار و احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۷۲، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۵۱

۱۹- یک تاس را دوبار پرتاب کرده‌ایم. چند پیشامد از فضای نمونه‌ای این آزمایش شامل حداقل یک بار ظاهرشدن عدد ۶ است؟

۱) $۲^{۲۵}$ ۲) ۲۰۴۷×۲^{۲۵} ۳) $۲^{۱۱}$ ۴) ۱۱

۲۰- هر یک از اعداد دورقمی که با ارقام ۲، ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم را روی یک کارت می‌نویسیم. تمام کارت‌ها را درون یک کیسه قرار می‌دهیم و به تصادف دو کارت از این کیسه خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مجموع اعداد دو کارت خارج‌شده بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۱- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، «مجموع دو عدد رو شده برابر با ۸» یا «هر دو عدد روشده، فرد» است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

محل انجام محاسبات

۲۲- سکه‌ای پرتاب می‌کنیم. اگر شیر ظاهر شد سه سکهٔ دیگر و اگر خط ظاهر شد دو سکهٔ دیگر پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که همهٔ پرتاب‌ها یکسان ظاهر شوند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۲۳- تیم ملی والیبال ایران ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو بازیکنی برابر نیست. به ترتیب دو بازیکن انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم که قد بازیکن دوم کوتاه‌تر است. با چه احتمالی بازیکن اول، بلندقدترین بازیکن تیم است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۳}$

۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۲۴- سه کارت رنگی در اختیار داریم که اولی دو رو سبز، دومی دو رو قرمز و سومی یک رو سبز و یک رو قرمز است. یک کارت به تصادف برمی‌داریم و یک رویش را می‌بینیم. اگر رنگ دیده‌شده سبز باشد، با چه احتمالی این کارت دو رو سبز است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۵- اگر A و B دو پیشامد فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A) = ۰/۲$ ، $P(B) = ۰/۲۲$ و $P(B \mid A) = ۰/۷$ ، آن‌گاه $P(B' \mid A')$ کدام است؟

۱) ۰/۹۶ ۲) ۰/۹۰ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۸۴

۲۶- با ارقام ۱،۱،۲،۲،۳،۳،۴،۴،۵ و ۵ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۰۸۰ ۲) ۱۴۲۰ ۳) ۲۱۰۰ ۴) ۲۲۲۰

۲۷- با حروف کلمهٔ shokoofeh چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان ساخت که حداکثر شامل یک حرف h باشد؟

۱) ۶۲۰ ۲) ۶۳۰

۳) ۵۰۰ ۴) ۵۲۰

۲۸- به چند طریق می‌توان یک عدد هشت‌رقمی نوشت به طوری که متشکل از سه رقم متمایز بوده و تعداد تکرار هر رقم در عدد اصلی، برابر با مقدار آن رقم باشد؟ (یعنی i تا رقم i، j تا رقم j و k تا رقم k داشته باشد.)

۱) ۲۲۴ ۲) ۳۳۶

۳) ۳۷۸ ۴) ۴۴۸

محل انجام محاسبات

هندسهٔ (۳): صفحه‌های ۳۳ تا ۵۹، **هندسهٔ (۲):** صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷

۲۹- معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^2 + ۴y - ۸x + ۱۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $x = -۱$
۲) $x = ۱$
۳) $x = -۲$
۴) $x = ۲$

۳۰- قطر دهانه و فاصلهٔ کانونی یک دیش مخابراتی، هر دو برابر با ۱ متر است. عمق این دیش چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲۵
۲) ۶/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۵۰

۳۱- دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ A را واقع بر آن در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ R باشد و از آن بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ C رسم کرد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) صفر

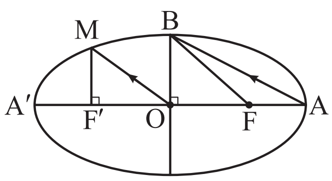
۳۲- دایره‌ای به شعاع ۵ و مماس بر محور xها که از نقطهٔ (۳,۲) گذشته و محور yها را قطع نمی‌کند، از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) (۷,۲)
۲) (۵,۶)
۳) (۴,۹)
۴) (۶,۱)

۳۳- دو دایره با شعاع‌های برابر در نقاط (۲,۰) و (۶,۴) متقاطع‌اند. اگر طول خط‌المرکزین، نصف طول وترمشترک دو دایره باشد، فاصلهٔ بین نقاط برخورد یکی از دایره‌ها با محور xها کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۴

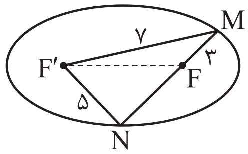
۳۴- در بیضی رسم‌شده به کانون‌های F و F′، اگر AB با OM موازی باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{OM}{AA'}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۳) $۲\sqrt{۳} - ۳$
۴) $\sqrt{۲} - ۱$

محل انجام محاسبات

۳۵- خروج از مرکز بیضی رسم‌شده که در آن MN از کانون F می‌گذرد، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳۶- اندازهٔ یک ضلع مثلثی $۴\sqrt{۲}$ و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به آن ۳۰° است. اگر اندازهٔ یک زاویهٔ دیگر مثلث ۱۵° باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۲}$　　۲) $۸\sqrt{۲}$　　۳) $۱۰\sqrt{۲}$　　۴) ۸

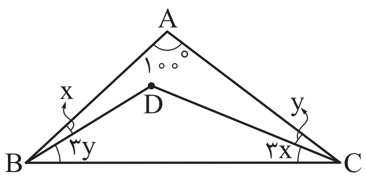
۳۷- مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی به طول اضلاع a، ۱۲و ۵ بیرون آن واقع است. چند مقدار طبیعی برای a قابل قبول است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۳　　۴) ۶

۳۸- چهارضلعی ABCD در دایره‌ای به قطر AD محاط شده است. اگر BC = CD و نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی روی قطر BD پاره‌خط‌هایی به طول ۳ و ۵ ایجاد کند، طول BC کدام است؟

۱) ۴　　۲) $۲\sqrt{۵}$　　۳) $۳\sqrt{۲}$　　۴) $۲\sqrt{۶}$

۳۹- در شکل رسم‌شده، اگر CD = ۸ و BD = ۶، آن‌گاه مساحت مثلث BCD کدام است؟



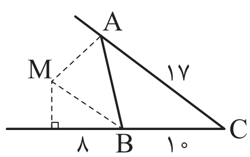
۱) $۶\sqrt{۳}$

۲) $۱۲\sqrt{۳}$

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۴۰- در شکل رسم‌شده، اگر M محل تقاطع نیمسازهای خارجی A و B باشد، آن‌گاه مساحت ABC کدام است؟



۱) ۶۴

۲) ۵۴

۳) ۳۶

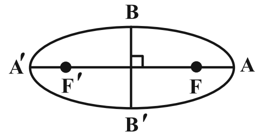
۴) ۴۸

محل انجام محاسبات

هندسه ۳

۳۱- گزینهٔ «۳» (کیوان دارابی)

مطابق شکل، در بیضی داریم:



$$\begin{cases} FA' = a + c = ۳۲ \\ BB' = ۲b = ۱۶ \Rightarrow b = ۸ \end{cases}$$

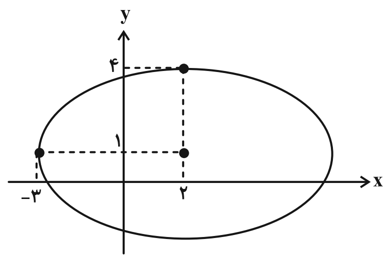
بنابراین: $b^۲ = ۶۴ \Rightarrow a^۲ - c^۲ = ۶۴ \Rightarrow (a-c)(a+c) = ۶۴$

$\Rightarrow (a-c) \times ۳۲ = ۶۴ \Rightarrow a - c = ۲ \Rightarrow FA = a - c = ۲$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۲- گزینهٔ «۴» (مهرداد ملوندی)

با توجه به فرض نتیجه می‌گیریم نقطهٔ $A(-۳, ۱)$ یک سر قطر بزرگ و نقطهٔ $(۲, ۴)$ یک سر قطر کوچک بیضی است و لذا $a = ۵$ و $b = ۳$ و در نتیجه $c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = ۴$.

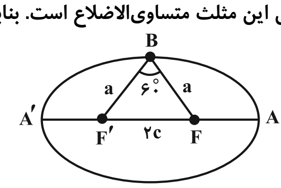


مختصات کانون‌های بیضی برابر می‌شود با: $\begin{cases} F = (۲+۴, ۱) = (۶, ۱) \\ F' = (۲-۴, ۱) = (-۲, ۱) \end{cases}$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۳- گزینهٔ «۱» (کیوان دارابی)

می‌دانیم که $BF = BF'$، پس مثلث $BF'F$ متساوی‌الساقین است. از طرفی $\hat{B} = ۶۰^\circ$، پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. بنابراین:



$$BF = F'F \Rightarrow a = ۲c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۴- گزینهٔ «۳» (افشین خاصه‌خان)

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFF' ضلع مقابل به زاویه $\hat{F}$ برابر نصف وتر است. لذا $\hat{F} = ۳۰^\circ$ و از آنجا $\hat{M} = ۶۰^\circ$ لذا $\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ و چون $\alpha = \beta$ پس $\alpha = \beta = ۶۰^\circ$ بنابراین: $\frac{\alpha}{۲} + \frac{\beta}{۳} = ۳۰^\circ + ۲۰^\circ = ۵۰^\circ$

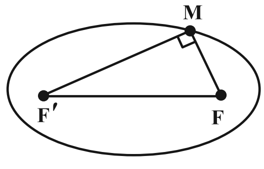
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۳۵- گزینهٔ «۱» (اسحاق اسفندیار)

طبق فرض: $FF' = ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$

قطر کوچک: $۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$

در بیضی داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$



$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \Rightarrow (\overbrace{MF + MF'}^{۲a})^۲ - ۲MF \times MF' = ۶۴$$

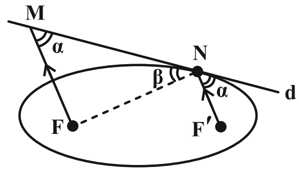
$$\Rightarrow ۱۰۰ - ۲MF \times MF' = ۶۴ \Rightarrow MF \times MF' = ۱۸$$

$$S_{MFF'} = \frac{۱}{۲} MF \times MF' = ۹$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۶- گزینهٔ «۳» (کیوان دارابی)

شکل زیر نشان می‌دهد که $FM = FN$:



$$\alpha = \beta \Rightarrow FM = FN$$

داریم: نقطه‌ای روی بیضی است $N \Rightarrow NF + NF' = ۲a$

$$\xrightarrow{FM=FN} FM + F'N = ۲a \Rightarrow ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$

از طرفی: $FF' = ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳$

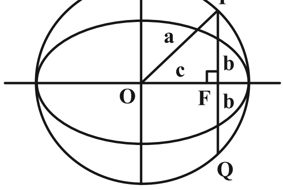
بنابراین:

$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow ۲b = ۸$ (قطر کوچک)

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۳۷- گزینهٔ «۲» (محمد صحت‌کار)

با توجه به شکل اندازهٔ پاره‌خط FP در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPF برابر با b است. بنابراین اندازهٔ پاره‌خط PQ برابر با $۲b$ خواهد بود و خواهیم داشت:



$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ ۲a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow c = ۳$$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۱۲ - ۹ = ۳ \Rightarrow b = \sqrt{۳} \Rightarrow PQ = ۲b = ۲\sqrt{۳}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(محمد صحت‌کار)*

اگر شعاع نوری از یکی از کانون‌های بیضی بگذرد و به بدنهٔ بیضی بتابد شعاع بازتاب از کانون دیگر می‌گذرد. بنابراین خط مورد نظر خط گذرنده از نقطهٔ M و کانون F' است. پس باید ابتدا مختصات کانون F' را بیابیم. با توجه به مرکز تقارن بیضی که مبدأ مختصات است و مختصات کانون F، مختصات کانون F' به صورت $(۰, -۵)$ خواهد بود. بنابراین معادلهٔ خط مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y-۰=\frac{۲-۰}{۳-(-۵)}(x-(-۵)) \Rightarrow y=\frac{۱}{۴}(x+۵)$$

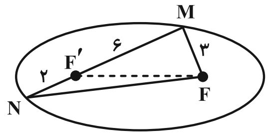
$$\Rightarrow ۴y=x+۵ \Rightarrow x-۴y=-۵$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا دو کانون، مقدار ثابتی است پس:

$$MF+MF'=NF+NF' \Rightarrow NF=۷$$



با استفاده از رابطهٔ استوارت در مثلث MNF برای محاسبهٔ FF' داریم:

$$۷^۲\times ۶+۳^۲\times ۲=FF'^۲\times ۸+۸\times ۶\times ۲ \Rightarrow ۲۹۴+۱۸=۸FF'^۲+۹۶$$

$$\Rightarrow ۸FF'^۲=۲۱۶ \Rightarrow FF'^۲=۲۷ \Rightarrow FF'=۳\sqrt{۳}$$

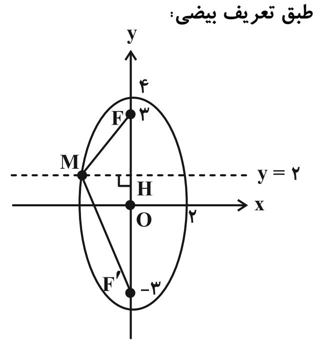
از طرفی خروج از مرکز بیضی از رابطهٔ $e=\frac{c}{a}$ به دست می‌آید:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{FF'}{MF+MF'}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۹}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل، $F(۰, ۳)$ و $F'(۰, -۳)$ کانون‌های بیضی هستند و داریم $a=۴$؛ همچنین طبق تعریف بیضی:



$$MF+MF'=۲a=۸$$

رابطهٔ فیثاغورس را در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MFH و $MF'H$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} MF^۲=MH^۲+۱^۲ \\ MF'^۲=MH^۲+۵^۲ \end{cases} \Rightarrow MF'^۲-MF^۲=۲۵-۱=۲۴$$

$$\Rightarrow (MF'-MF)\underbrace{(MF'+MF)}_{۸}=۲۴ \Rightarrow MF'-MF=۳$$

$$\begin{cases} MF'+MF=۸ \\ MF'-MF=۳ \end{cases} \Rightarrow MF'=۵/۵\ ,\ MF=۲/۵$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

هندسه ۳- پیشروی سریع

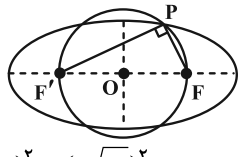
۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

$$|AA'|=۲a=۶\sqrt{۵} \Rightarrow a=۳\sqrt{۵}$$

$$|BB'|=۲b=۴ \Rightarrow b=۲$$

$$\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۴۵=۴+c^۲ \Rightarrow c=\sqrt{۴۱}$$

شعاع دایره با $c=\sqrt{۴۱}$ برابر است بنابراین FF' قطر دایره است. P نقطه‌ای روی محیط دایره است پس قطر (FF') را با زاویهٔ ۹۰° رؤیت می‌کند. بنابراین:

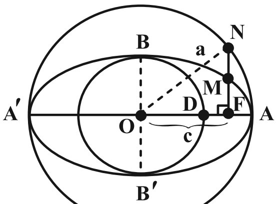


$$PF^۲+PF'^۲=(۲c)^۲=(۲\sqrt{۴۱})^۲=۱۶۴$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

برای حل سؤال از نتیجهٔ دو تمرین کتاب درسی استفاده می‌کنیم:



مطابق شکل داریم: $\overset{\Delta}{ONF}: NF=\sqrt{a^۲-c^۲}=b$

از طرفی: $MF=\frac{b^۲}{a}$

بنابراین: $\left.\begin{array}{l} FM=\frac{b^۲}{a} \\ FN=b \end{array}\right\} \Rightarrow MN=b-\frac{b^۲}{a} \Rightarrow MN=\frac{ba-b^۲}{a}$

$$\Rightarrow MN=\frac{b(a-b)}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}(a-b)=\frac{۱}{۲} \qquad (*)$$

از طرفی $DA=۱$ در نتیجه: $OA-OD=۱ \Rightarrow a-b=۱$

بنابراین: $\xrightarrow{(*)} \frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}$

خروج از مرکز: $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

با توجه به خاصیت بازتابندگی بیضی، خط Δ نیمساز زاویهٔ FMF' است. بنابراین براساس خواص نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث FMF' خواهیم داشت:

$$\frac{DF}{DF'}=\frac{MF}{MF'} \Rightarrow \frac{MF'}{DF'}=\frac{MF}{DF}=\frac{۳}{۱}$$

$$\Rightarrow \frac{MF+MF'}{DF+DF'}=\frac{3}{1}\Rightarrow \frac{2a}{2c}=3\Rightarrow a=3c\Rightarrow c=\frac{a}{3}$$

می‌دانیم که در بیضی رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ برقرار است. بنابراین:

$$2b=8\Rightarrow b=4\Rightarrow a^2=16+\frac{a^2}{9}\Rightarrow \frac{8}{9}a^2=16\Rightarrow a^2=18$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\Rightarrow AA'=2a=6\sqrt{2}$$ (قطر بزرگ)

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

چون رأس و کانون سهمی روی خط $y=1$ قرار دارند، لذا سهمی افقی است. از طرفی کانون ۳ واحد سمت چپ رأس قرار دارد، پس دهانهٔ سهمی رو به چپ باز می‌شود و $a=3$ است.

معادلهٔ سهمی: $(y-1)^2=-12(x-2)$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

خط هادی افقی است، پس نوع سهمی قائم بوده و به صورت زیر معادلهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{رأس}\ S:(1,-1) \\ \text{خط هادی}\ (\Delta): y=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=|y_\Delta-y_S|=|-\frac{3}{2}+1|=\frac{1}{2} \\ y_S>y_\Delta\Rightarrow \text{دهانهٔ سهمی رو به بالا}\end{cases}$$

معادلهٔ سهمی: $(x-1)^2=4(\frac{1}{2})(y-(-1))\Rightarrow (x-1)^2=2(y+1)$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{محور } y\text{ها}} 1=2(y+1)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

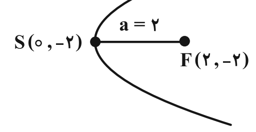
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

M نقطه‌ای روی سهمی است، بنابراین فاصله‌اش از کانون و خط هادی برابر است. بنابراین حالا که M از رأس و خط هادی به یک فاصله است، پس از کانون و رأس نیز به یک فاصله است. پس M روی عمودمنصف SF قرار دارد. $(y+2)^2=8x$

$$\Rightarrow (y+2)^2=4\times 2\times (x-0)\Rightarrow S=(0,-2)\quad ,\quad a=2$$

سهمی افقی است و دهانهٔ آن به سمت راست است. خط $x=1$ عمودمنصف پاره‌خط SF است. این خط را با سهمی قطع می‌دهیم.



$$\begin{cases}(y+2)^2=8x \\ x=1\end{cases}\Rightarrow (y+2)^2=8\Rightarrow y+2=\pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y=-2\pm 2\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

با توجه به معادلات محور تقارن و خط هادی و این‌که از $M(4,2)$ می‌گذرد، نتیجه می‌گیریم سهمی قائم رو به بالا است و رأس سهمی به صورت $(2,k)$ است. معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$(x-2)^2=4a(y-k)\Rightarrow y=k-a=0\Rightarrow k=a$$

$$(x-2)^2=4a(y-a)\xrightarrow{(4,2)}(4-2)^2=4a(2-a)$$

$$4a^2-8a+4=0\Rightarrow (a-1)^2=0\Rightarrow a=1$$

معادلهٔ سهمی: $\Rightarrow (x-2)^2=4(y-1)$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمد صحت‌کار)*

کانون این سهمی روی خط $y=x-1$ است. بنابراین می‌توانیم مختصات کانون را به صورت $(m\ ,\ m-1)$ در نظر بگیریم. با توجه به ویژگی سهمی فاصلهٔ نقطهٔ A از کانون و خط هادی با هم برابر است. بنابراین:

$$\sqrt{(m+1)^2+(m-1-2)^2}=|6-2|=4$$

$$\Rightarrow m^2+2m+1+m^2-6m+9=16$$

$$\Rightarrow 2m^2-4m-6=0\Rightarrow m^2-2m-3=0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+1)=0$$

بنابراین $m=3$ یا $m=-1$ است و خواهیم داشت:

$$m=3\Rightarrow F(3\ ,\ 2)\quad ,\quad m=-1\Rightarrow F(-1\ ,\ -2)$$

کانون این سهمی در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات است پس کانون نقطهٔ $F(3\ ,\ 2)$ است و فاصلهٔ این نقطه تا خط هادی یعنی خط $y=6$ برابر است با: $6-2=4$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

معادلهٔ یک سهمی قائم رو به پایین به صورت $(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$ است. محور تقارن این سهمی خطی است که از وسط نقاط $A(7\ ,\ 0)$ و $B(-1\ ,\ 0)$ می‌گذرد و بر محور xها عمود است. بنابراین معادلهٔ محور تقارن به صورت $x=\frac{-1+7}{2}=3$ است. بنابراین طول رأس سهمی برابر با ۳ است.

از طرفی دیگر رأس سهمی روی خط $y=2x-1$ قرار دارد. بنابراین:

$$x_S=3\Rightarrow y_S=2\times 3-1=5$$

پس معادلهٔ این سهمی به صورت $(x-3)^2=-4a(y-5)$ است. نقاط $A(7\ ,\ 0)$ و $B(-1\ ,\ 0)$ روی این سهمی هستند. پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$(7-3)^2=-4a(0-5)\Rightarrow 20a=16\Rightarrow a=0/8$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

نقطهٔ $O(-1,2)$ مرکز دایرهٔ داده شده و شعاع آن برابر $r=2$ است. اگر M را یکی از مراکز دایره‌های مورد نظر بگیریم، طبق فرض دایره‌ای به مرکز M وجود دارد که هم بر خط $x=3$ و هم بر دایره به مرکز O و شعاع r مماس است. فرض کنید شعاع این دایره برابر R باشد، در این صورت فاصلهٔ M از خط $x=3$ برابر R و فاصلهٔ M از O برابر $R+2$ است. لذا فاصلهٔ M از O، ۲ واحد بیشتر از فاصله‌اش از خط $x=3$ است، پس فاصلهٔ M از O برابر فاصله‌اش از خط $x=5$ است. پس M روی سهمی به کانون $O(-1,2)$ و خط هادی $x=5$ قرار دارد. فاصلهٔ $O(-1\ ,\ 2)$ از خط هادی $x=5$ برابر $6=(-1)-5$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

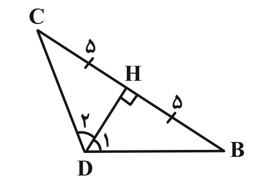
هندسه ۲

۵۱- **گزینهٔ «۴»** *(اسحاق اسفندیار)*

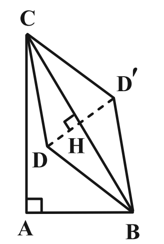
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول وتر برابر ۱۰ می‌شود. در مثلث متساوی‌الساقین DBC، ارتفاع DH (وارد بر قاعده) را رسم می‌کنیم.

داریم: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 60^\circ$

$$\sin \hat{D}_1 = \frac{BH}{BD} \Rightarrow BD = DC = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$



بازتاب نقطهٔ D را نسبت به وتر BC به دست می‌آوریم و D' می‌نامیم.



$$S_{DBC} = \frac{1}{2} DB \times DC \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$$

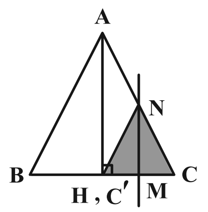
$$S_{ABD'C} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{DBC}} = \frac{1}{2}(6 \times 8) + \frac{25\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{ABD'C} = 24 + \frac{25\sqrt{3}}{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(اسحاق اسفندیار)*

مطابق شکل، نقطهٔ C' منطبق بر H (پای ارتفاع AH) است.



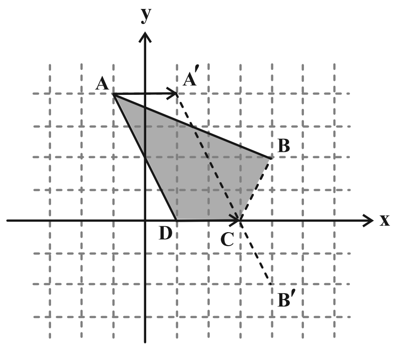
$$MN \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NM}{AH} = \frac{CM}{CH} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow NM = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

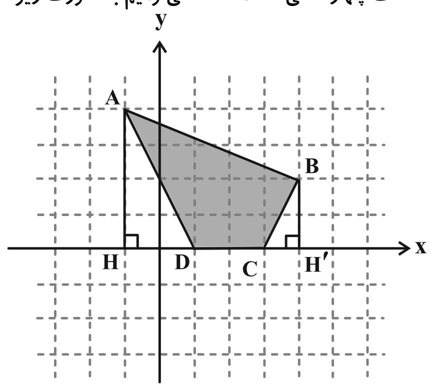
$$S_{NCC'} = \frac{1}{2} NM \times CC' = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۵۳- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*



نقاط $C(n+2\,,\,0)$ و $D(n\,,\,0)$ روی محور xها به فاصلهٔ ۲ واحد از هم هستند. پس نقطهٔ A را به اندازهٔ ۲ واحد در راستای محور xها انتقال می‌دهیم تا به $A'(1\,,\,4)$ برسیم. نقطهٔ B را نیز نسبت به محور xها بازتاب می‌دهیم تا $B'(4\,,\,-2)$ به دست آید. نقاط A' و B' را به هم وصل می‌کنیم تا محور xها را در $C(3\,,\,0)$ قطع کند. بنابراین $D(1\,,\,0)$ به دست می‌آید و محیط چهارضلعی $ABCD$ کمترین مقدار ممکن است، برای پیدا کردن مساحت چهارضلعی $ABCD$ می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:



$$S_{ABCD} = S_{AHH'B} - S_{AHD} - S_{BH'C} = 15 - 4 - 1 = 10$$

توجه: $S_{AHH'B} = \frac{(2+4)\times 5}{2} = 15$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ترکیب یک بازتاب محوری با خودش، ترکیب دوران 180° با خودش و همچنین ترکیب تجانس با نسبت $k = -1$ با خودش، یک تبدیل همانی است ولی ترکیب انتقال (با بردار $\vec{u}$) با خودش، انتقالی با بردار $2\vec{u}$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

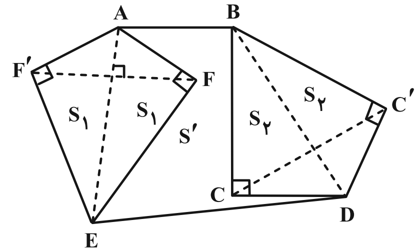
طبق فرض $EF = 2AF = 2n$ و $BC = 2CD = 2p$، لذا توسط قضیهٔ فیثاغورس، طول اضلاع قائمهٔ دو مثلث AEF و BCD را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} n^2 + (2n)^2 = 6^2 \Rightarrow n = \frac{6}{\sqrt{5}}\ ,\ 2n = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ p^2 + (2p)^2 = 8^2 \Rightarrow p = \frac{8}{\sqrt{5}}\ ,\ 2p = \frac{16}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

مساحت هر یک از مثلث‌های مذکور برابر می‌شود با:

$$\begin{cases} S_۱ = S_{AEF} = \frac{۱}{۲}(n)\times(۲n) = \frac{۳۶}{۵} \\ S_۲ = S_{BCD} = \frac{۱}{۲}(p)\times(۲p) = \frac{۶۴}{۵} \end{cases}$$

مطابق شکل با بازتاب نقاط C و F به ترتیب نسبت بـه خطـوط BD و AE، بدون تغییر محیط، مساحت شش‌ضلعی مـورد نظـر را تـا حـد امکـان می‌توان افزایش داد. اگر مساحت شش‌ضلعی اولیه را S' بگیریم، آن‌گاه طبق فرض داریم: $S' + ۲S_۱ + ۲S_۲ = ۳S'$

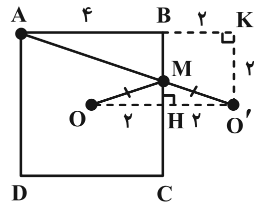


$$\Rightarrow S' = S_۱ + S_۲ = \frac{۳۶}{۵} + \frac{۶۴}{۵} = ۲۰$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۵۶- **گزینهٔ «۲»** (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل و طبق مسئله هرون، بازتاب O را نسبت به ضـلع BC، نقطـهٔ O' می‌نامیم. تقاطع AO' با ضلع BC را نقطهٔ M می‌نامیم که به ازای آن حاصل $MA + MO$ کمترین مقدار مورد نظر است. داریم:

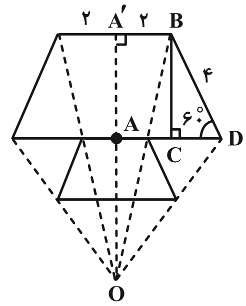


$$MA + MO = MA + MO' = AO' = \sqrt{AK^۲ + KO'^۲}$$
$$= \sqrt{۶^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۵۷- **گزینهٔ «۴»** (احمدرضا فلاح)

مطابق شکل، خط‌های واصل بـین هـر نقطـه و تصـویرش در مرکـز تجـانس همرس‌اند. داریم:



$$\overset{\Delta}{BCD} : BC = ۴\sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین $AA' = ۲\sqrt{۳}$. طبق تعریف تجانس:

$$\frac{OA'}{OA} = k = ۳ \Rightarrow \frac{OA + AA'}{OA} = ۳ \Rightarrow \frac{OA + ۲\sqrt{۳}}{OA} = ۳$$
$$\Rightarrow OA = \sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۸)

۵۸- **گزینهٔ «۱»** (افشین خاصه‌خان)

می‌دانیم دوران تبدیلی طولپاست و انـدازه ضـلع را حفـظ مـی‌کنـد. بنـابراین $AB' = AB$ و چـون وتـر روی ضـلع قـائم منطبـق شـده اسـت لـذا $B\hat{A}C = ۳۰^\circ$ (برابر زاویهٔ دوران). بنابراین: $AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times AB$

حال طبق فرض داریم:

$$B'C = AB' - AC = AB - \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB = \sqrt{۳} + ۱$$
$$\Rightarrow AB\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\right) = \sqrt{۳} + ۱$$
$$\Rightarrow AB = \frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۲-\sqrt{۳}} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = ۲(۵ + ۳\sqrt{۳}) = ۶\sqrt{۳} + ۱۰$$

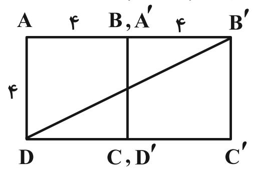
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

اولاً طول ضلع مربع برابر ۴ است. زیرا:

قطر مربع $= a\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow a = ۴$

ثانیاً تبدیل مطلوب سؤال به صورت زیر است:



قضیهٔ فیثاغورس: $DB'^۲ = ۴^۲ + ۸^۲ = ۸۰$

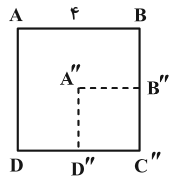
$$\Rightarrow DB' = ۴\sqrt{۵}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** (سوگند روشنی)

ترکیب دو تجانس با مرکز تجانس یکسان O و نسبت‌های $k_۱$ و $k_۲$، یک تجانس به مرکز O با نسبت $k_۱k_۲$ است. در نتیجه:

$$k_۱k_۲ = \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$



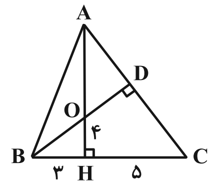
$$\Rightarrow \frac{S_{A''B''C''D''}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{۱}{۶}\right)^۲ = \frac{۱}{۳۶}$$

در نتیجـه مسـاحت ناحیـهٔ بـین دو مربـع مـورد نظـر، $\frac{۳۵}{۳۶}$ مسـاحت مربـع $ABCD$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۸)

هندسه ۱

۶۱- گزینهٔ «۲» (اسحاق اسفندیار)



$$\overset{\Delta}{BOH}: BO^{۲} = BH^{۲} + OH^{۲} \Rightarrow BO = ۵$$

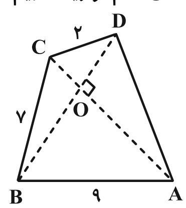
$$\overset{\Delta}{BHO} \sim \overset{\Delta}{BCD} \xrightarrow{(ز\,ز)} \frac{OH}{DC} = \frac{OB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{DC} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow DC = ۶/۴$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۶۲- گزینهٔ «۳» (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

اگر در یک چهارضلعی قطرها بر هم عمود باشند آن‌گاه چهارضلعی حاصل از به هم وصل کردن (متوالی) وسط‌های اضلاع در آن چهارضلعی، یک مستطیل خواهد بود (و برعکس). در چهارضلعی $ABCD$ مطابق شکل، قطرهای AC و BD بر هم عمودند. اگر O محل برخورد قطرها باشد با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه داریم:



$$\begin{rcases} AO^{۲} + BO^{۲} = ۸۱ \\ CO^{۲} + DO^{۲} = ۴ \\ BO^{۲} + CO^{۲} = ۴۹ \\ AO^{۲} + DO^{۲} = AD^{۲} \end{rcases}$$

$$\Rightarrow AO^{۲} + BO^{۲} + CO^{۲} + DO^{۲} = ۸۱ + ۴ = ۴۹ + AD^{۲}$$

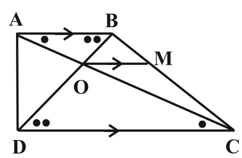
$$\Rightarrow AD = ۶$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۴)

۶۳- گزینهٔ «۱» (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

دو مثلث AOB و COD زوایای برابر دارند پس با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه است، پس:

$$\frac{S_{COD}}{S_{AOB}} = k^{۲} = ۴ \Rightarrow k = \frac{OD}{BO} = ۲$$



$$\frac{BO}{OD} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BO}{BD} = \frac{۱}{۳}$$

در مثلث BDC چون $OM \parallel CD$، لذا طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{OM}{CD} = \frac{BO}{BD} = \frac{۱}{۳}$$

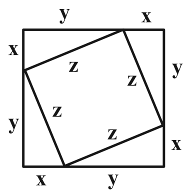
دو مثلث COD و MOC ارتفاع‌های برابر دارند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است، در نتیجه:

$$\frac{S_{MOC}}{S_{COD}} = \frac{OM}{CD} = \frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۶۴- گزینهٔ «۳» (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل، رئوس مربع کوچک، اضلاع مربع بزرگ را به دو قسمت به طول‌های x و y تقسیم کرده است. طبق فرض داریم:



$$\begin{cases} ۴(x+y) = ۴۲ \Rightarrow x + y = \frac{۲۱}{۲} \\ ۴z = ۳۰ \Rightarrow z = \frac{۱۵}{۲} \end{cases}$$

از طرفی طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^{۲} + y^{۲} = z^{۲} \Rightarrow (x+y)^{۲} - ۲xy = z^{۲}$$

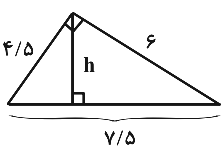
$$\Rightarrow ۲xy = (\frac{۲۱}{۲})^{۲} - (\frac{۱۵}{۲})^{۲} = \frac{۲۱۶}{۴} = ۵۴ \Rightarrow y = \frac{۲۷}{x}$$

$$\xrightarrow{x+y=\frac{۲۱}{۲}} x + \frac{۲۷}{x} = \frac{۲۱}{۲} \Rightarrow x^{۲} - \frac{۲۱}{۲}x + ۲۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۲۱x + ۵۴ = ۰ \Rightarrow (۲x-۹)(x-۶) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۹}{۲} = ۴/۵ \Rightarrow y = ۶ \\ x = ۶ \Rightarrow y = ۴/۵ \end{cases}$$

فاصلهٔ رأس مربع بزرگ از نزدیک‌ترین ضلع مربع کوچک، همان طول ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر است. داریم:

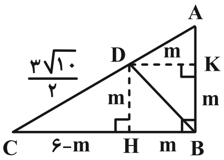


$$۴/۵ \times ۶ = ۷/۵h \Rightarrow h = \frac{۴/۵ \times ۶}{۷/۵} = ۳/۶$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۶۵- گزینهٔ «۴» (مهرداد ملونری)

چهارضلعی $BCDK$ ذوزنقه قائم‌الزاویه است، پس $DK \parallel BC$ و طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود $\hat{D}_1 = 45^\circ$ و لذا مثلث BDK قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.



فرض می‌کنیم $DK = KB = m$؛ ارتفاع DH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل داریم:

$$m^2 + (6-m)^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 \Rightarrow 2m^2 - 12m + 36 = 22/5$$
$$\Rightarrow 2m^2 - 12m + 13/5 = 0$$
$$m = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 8\times 13/5}}{4} = \frac{12 \pm 6}{4} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 4/5 \\ m_2 = 1/5 \end{cases}$$

طبق فرض $BC > AB$، پس $CH > DH$ و در نتیجه:

$$DH = 1/5$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۴۱، ۴۲ و ۶۱ تا ۶۳)

۶۶- گزینهٔ «۱» (احمدرضا فلاح)

از هر رأس $n-3$ قطر می‌گذرد. برای سه رأس دوبه‌دو غیرمجاور، با توجه به قطرهای مشترک در مجموع $3(n-3)-3$ قطر متمایز بین آن‌ها وجود دارد. پس:

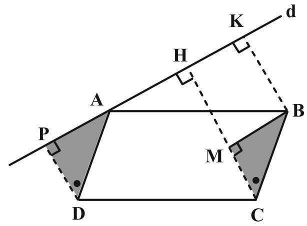
$$3(n-3) - 3 = 18 \Rightarrow 3(n-3) = 21 \Rightarrow n = 10$$

با رسم قطرهای گذرنده از یک رأس n ضلعی، سطح آن به $n-2$ مثلث تقسیم می‌شود. پس جواب $10 - 2 = 8$ می‌باشد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۶۷- گزینهٔ «۳» (هومن عقیلی)

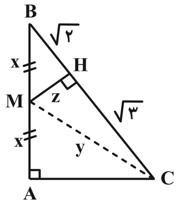
از B عمود BM را بر CH رسم می‌کنیم. در این صورت $\overset{\Delta}{BMC} \cong \overset{\Delta}{APD}$ پس $PD = CM$ و $BK = MH$ و در نتیجه $CH = MH + CM$ و داریم $CH = 8 + 4 = 12$.



(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۶۸- گزینهٔ «۲» (هومن عقیلی)

M را به C وصل می‌کنیم. مطابق شکل، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

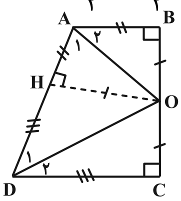


$$y^2 = z^2 + 3$$
$$-\quad x^2 = z^2 + 2$$
$$y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow AC^2 = 1 \Rightarrow AC = 1$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۶۹- گزینهٔ «۱» (محمد صحت‌کار)

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{D} = \frac{1}{2}\times 180^\circ = 90^\circ$$



بنابراین زاویهٔ $A\hat{O}D$ برابر 90° و مثلث AOD قائم‌الزاویه است. از طرفی دیگر طبق شکل و خاصیت نیمساز خواهیم داشت:

$$\begin{cases} OH = OB = OC \\ AH = AB = 4 \quad \Rightarrow AD = 4 + 9 = 13 \\ DH = DC = 9 \end{cases}$$

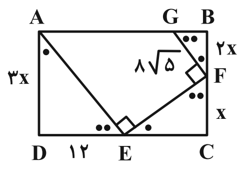
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOD داریم:

$$OH^2 = AH \times DH = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow OH = 6$$
$$\Rightarrow BC = OB + OC = 6 + 6 = 12$$
$$\Rightarrow \text{محیط ذوزنقه} = 4 + 12 + 9 + 13 = 38$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۴۱، ۴۲ و ۶۱ تا ۶۳)

۷۰- گزینهٔ «۴» (محمد صحت‌کار)

مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADE، CFE و BGF به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. بنابراین:



$$\frac{BG}{2x} = \frac{12}{3x} \Rightarrow BG = \frac{2}{3}\times 12 = 8$$
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{BGF}: BF^2 = (8\sqrt{5})^2 - 8^2 = 256$$
$$\Rightarrow BF = 16 \Rightarrow CF = 8$$
$$\Rightarrow \frac{x}{EC} = \frac{BG}{2x} \Rightarrow \frac{8}{EC} = \frac{8}{16} \Rightarrow EC = 16$$
$$\Rightarrow CD = 16 + 12 = 28 \Rightarrow AB = 28$$
$$\Rightarrow AG = 28 - 8 = 20$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

ریاضیات گسسته

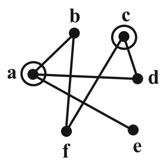
۷۱- گزینهٔ «۳» *(محمد صحت‌کار)*

گزاره‌های «الف»، «ب» و «پ» گزاره‌هایی درست هستند اما گزارهٔ «ت» گزاره‌ای نادرست است، زیرا برای هر گراف با مجموعهٔ رأس‌های $V = \{v_1 , v_2 , ... , v_p\}$، خود مجموعهٔ V مجموعه‌ای احاطه‌گر است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۷۲- گزینهٔ «۲» *(محمد صحت‌کار)*

ابتدا باید گرافی با ۶ رأس رسم کنیم و هر رأس را به نام یکی از شهرها نام‌گذاری کنیم. سپس نقاط متناظر با شهرهایی که فاصلهٔ آن‌ها ۲۰ کیلومتر یا کمتر است را به هم وصل کنیم. در این شرایط، هدف، یافتن عدد احاطه‌گری این گراف است.



مجموعه‌های دوعضوی $\{a , c\}$ و $\{a , f\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم این گراف هستند. بنابراین: $\gamma(G) = 2$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۷۳- گزینهٔ «۴» *(کیوان دارابی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

$$p = 8 \;,\; \Delta = 3 \;,\; \gamma = 2 \Rightarrow 2 = \frac{8}{3+1} \Rightarrow \gamma = \frac{p}{\Delta + 1}$$

گزینهٔ «۲»:

$$p = p \;,\; \Delta = p-1 \;,\; \gamma = 1 \Rightarrow 1 = \frac{p}{p-1+1} \Rightarrow \gamma = \frac{p}{\Delta + 1}$$

گزینهٔ «۳»:

$$p = p \;,\; \Delta = 0 \;,\; \gamma = p \Rightarrow p = \frac{p}{0+1} \Rightarrow \gamma = \frac{p}{\Delta + 1}$$

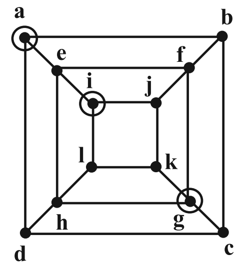
گزینهٔ «۴»:

$$p = 6 \;,\; \Delta = 2 \;,\; \gamma = 3 \Rightarrow 3 \neq \frac{6}{2+1} \Rightarrow \gamma \neq \frac{p}{\Delta + 1}$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۷۴- گزینهٔ «۳» *(کیوان دارابی)*

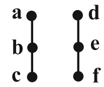
در این گراف $\gamma = 3$، به عنوان مثال یکی از $\gamma-$ مجموعه‌ها، مجموعه $\{a, g , i\}$ است.



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

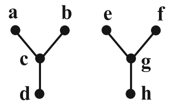
۷۵- گزینهٔ «۲» *(فرزاد جوادی)*

G_1 :



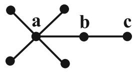
$\gamma = 2$, یکتاست $\Leftarrow \{b , e\} =$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم

G_2 :



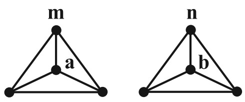
$\gamma = 2$, یکتاست $\Leftarrow \{c , g\} =$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم

G_3 :



G_3 دارای دو مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ می‌باشد یکی $\{a , b\}$ و دیگری $\{a , c\}$؛ لذا غیریکتاست.

G_4 :



دو مجموعهٔ $\{m , n\}$ و $\{a , b\}$ در G_4 احاطه‌گر مینیمم با اندازهٔ ۲ هستند لذا یکتا نیستند.

پس در دو مورد از چهار گراف بالا مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا بوده و $\gamma = 2$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۷۶- گزینهٔ «۳» *(کیوان دارابی)*

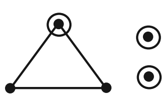
در این گراف چون $\gamma = 1$ بنابراین گراف رأس فول دارد. به عبارتی:

$\Delta = p - 1 = 5 - 1 = 4$

و چون گراف تنها دو $\gamma-$ مجموعه دارد، پس تنها دو رأس فول یعنی رأس درجهٔ ۴ دارد. کمترین اندازهٔ گراف زمانی است که ۳ رأس دیگر گراف از درجهٔ ۲ باشند (توجه داشته باشید با درجات پایین‌تر گرافی وجود ندارد). پس درجات رئوس گراف G به صورت ۲, ۲, ۲, ۴, ۴ است. برای به دست آوردن درجات رئوس در گراف مکمل، درجات رئوس G را از $p-1$ یعنی ۴، کم می‌کنیم. پس دنبالهٔ درجات گراف $\overline{G}$ به صورت زیر است:

۲, ۲, ۲, ۰, ۰

که اگر آن را رسم کنیم خواهیم دید که $\gamma(\overline{G}) = 3$.



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۷۷- گزینهٔ «۴» (مهرداد ملوندی)

گزینه‌های «۱» تا «۳» را می‌توان با اضافه کردن یک رأس دیگر به مجموعهٔ احاطه‌گر تبدیل کرد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $\{b, c, l\} \cup \{k\} = \{b, c, k, l\}$

گزینهٔ «۲»: $\{c, f, j\} \cup \{k\} = \{c, f, j, k\}$

گزینهٔ «۳»: $\{e, g, i\} \cup \{h\} = \{e, g, i, h\}$

در گزینهٔ «۴»، مجموعهٔ $\{h, i, l\}$ هیچ یک از رئوس a و d و همچنین رئوس مجاور آن‌ها را ندارد و از آنجا که مجموعه رئوس مجاور هر یک از رأس‌های a و d فاقد عضو مشترک هستند، لذا نمی‌توان فقط با یک رأس، مجموعهٔ داده شده را به مجموعهٔ احاطه‌گر تبدیل کرد.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۷۸- گزینهٔ «۱» (احمدرضا فلاح)

بررسی موارد:

الف) این مجموعه احاطه‌گر است و با حذف هر عضو آن، مجموعهٔ باقی‌مانده احاطه‌گر نیست، پس احاطه‌گر مینیمال است.

ب) این مجموعه احاطه‌گر است و با حذف هر عضو آن، مجموعهٔ باقی‌مانده احاطه‌گر نیست، پس احاطه‌گر مینیمال است.

پ) این مجموعه احاطه‌گر است اما با حذف رأس d مجموعهٔ باقی‌مانده $(\{a, f, g\})$ کماکان احاطه‌گر است. پس این مجموعه مینیمال نیست.

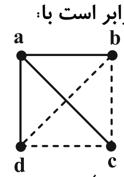
ت) این مجموعه هم شبیه مجموعه‌های (الف) و (ب) مینیمال است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۷۹- گزینهٔ «۳» (محمد صحت‌کار)

برای آن که مجموعهٔ یک عضوی $D = \{a\}$ مجموعه‌ای احاطه‌گر باشد باید رأس a با همهٔ رأس‌های دیگر مجاور باشد. بنابراین در مجموعهٔ یال‌های این گراف یال‌های ab، ac و ad حتماً هستند اما سه یال دیگر یعنی bc، bd و cd می‌توانند در مجموعهٔ یال‌های این گراف باشند یا نباشند.

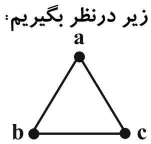
پس تعداد گراف‌های مطلوب برابر است با: $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$



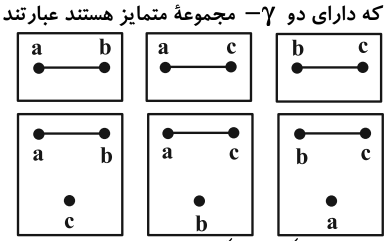
(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۸۰- گزینهٔ «۳» (سوگند روشنی)

اگر گراف $C_۳$ را به صورت زیر درنظر بگیریم:



زیرگراف‌هایی که دارای دو $\gamma-$ مجموعهٔ متمایز هستند عبارتند از:



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

ریاضیات گسسته- پیشروی سریع

۸۱- گزینهٔ «۳» (محمد صحت‌کار)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

گزینهٔ «۲»: احاطه‌گر نیست.

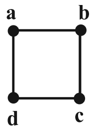
گزینهٔ «۳»: یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است که با توجه به گزینهٔ «۱»، مینیمم نیست.

گزینهٔ «۴»: احاطه‌گر است ولی مینیمال نیست زیرا با حذف رأس d هم‌چنان احاطه‌گر باقی می‌ماند.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

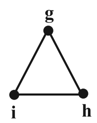
۸۲- گزینهٔ «۴» (محمد صحت‌کار)

این گراف گرافی ناهمبند با ۳ بخش است. برای یافتن تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم باید ابتدا تعداد $\gamma-$ مجموعه‌های هر بخش را حساب کنیم و سپس این اعداد را در هم ضرب کنیم.



$$\binom{۴}{۲} = ۶$$

$$\binom{۲}{۱} = ۲$$



$$\binom{۳}{۱} = ۳$$

رأس‌های j و k در همهٔ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم هستند. بنابراین:

$$۳۶ = ۶ \times ۲ \times ۳ = \text{تعداد } \gamma- \text{ مجموعه‌ها}$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۸۳- گزینهٔ «۱» (مصطفی دیداری)

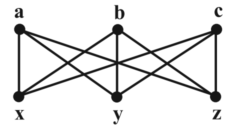
مرتبهٔ گراف فرد است پس k باید زوج باشد یعنی $k = ۴, ۶, ۸$. کران پایین عدد احاطه‌گری برابر $\left\lceil \frac{p}{\Delta+۱} \right\rceil$ یا $\left\lceil \frac{p}{k+۱} \right\rceil$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta = ۴ &\Rightarrow \left\lceil \frac{۱۷}{۴+۱} \right\rceil = ۴ \\ \Delta = ۶ &\Rightarrow \left\lceil \frac{۱۷}{۶+۱} \right\rceil = ۳ \\ \Delta = ۸ &\Rightarrow \left\lceil \frac{۱۷}{۸+۱} \right\rceil = ۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۴+۳+۲ = ۹$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

برای تحلیل راحت‌تر گراف، گراف یک‌ریخت (هم‌نوع) با آن را رسم می‌کنیم.



در این گراف $\gamma = ۲$، اما گراف دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی دارد: مجموعه‌های $\{a , b , c\}$ و $\{x , y , z\}$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: مجموعهٔ $\{۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، زیرا با حذف هر رأس، مجموعهٔ دیگر احاطه‌گر نخواهد بود.

گزینهٔ «۲»: مجموعهٔ $\{۹ , ۸ , ۱\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

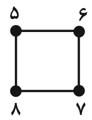
گزینهٔ «۳»: این مجموعه احاطه‌گر است، اما مینیمال نیست، زیرا اگر عضو ۸ را از مجموعه حذف کنیم، مجموعه کماکان احاطه‌گر خواهد بود.

گزینهٔ «۴»: مجموعهٔ $\{۱۰ , ۹ , ۳ , ۱\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

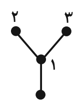
عدد احاطه‌گری $C_۴$ با ۲ برابر است، یعنی گراف با حداقل ۲ رأس احاطه می‌شود. هر دو رأس هم انتخاب کنیم، یک مجموعهٔ احاطه‌گر تشکیل می‌دهند. مجموعه‌های دارای بیشتر از ۲ عضو نیز قطعاً احاطه‌گر خواهند بود. بنابراین:



$\Rightarrow$

$$\text{تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر} = \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱$$

از طرفی بخش دیگر گراف یعنی گراف زیر نیز دو نوع مجموعهٔ احاطه‌گر دارد. آن‌هایی که شامل رأس ۱ هستند و آن‌هایی که شامل رأس ۱ نیستند.



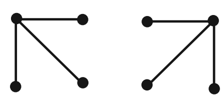
$\Rightarrow$ تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر $= ۲^۳ + ۱ = ۹$

بنابراین تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر این گراف برابر است با حاصل‌ضرب این دو عدد، یعنی: $۹ \times ۱۱ = ۹۹$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۸۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

چنین گرافی می‌تواند از دو بخش مجزا تشکیل شده باشد که در هر بخش، یک رأس وجود دارد که با تمام رئوس دیگر مجاور است. مطابق شکل چنین گرافی حداقل ۶ یال دارد.



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

عدد احاطه‌گری $P_۶$ برابر ۲ است، پس مجموعه‌های احاطه‌گر آن ۲ تا ۶ عضوی هستند. تنها مجموعهٔ احاطه‌گر ۲ عضوی (مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم)، مجموعهٔ $\{b , e\}$ است. این گراف دارای ۶ مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی شامل b به صورت $\{b , c , e\}$ ، $\{b , c , f\}$ ، $\{b , d , e\}$، $\{b , e , a\}$، $\{b , d , f\}$ و $\{b , e , f\}$ است. برای رئوس این گراف می‌توان $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ مجموعهٔ ۴ عضوی شامل رأس b تعریف کرد که فقط مجموعهٔ $\{a , b , c , d\}$ احاطه‌گر نیست. این گراف دارای $\binom{۵}{۴} = ۵$ مجموعهٔ ۵ عضوی احاطه‌گر شامل رأس b است و همچنین تنها یک مجموعهٔ ۶ عضوی احاطه‌گر در این گراف موجود است که طبیعتاً شامل رأس b نیز می‌باشد. بنابراین تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر شامل رأس b برابر است با: $۱ + ۶ + ۹ + ۵ + ۱ = ۲۲$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

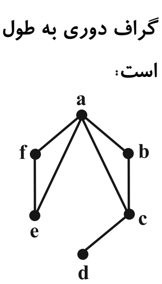
۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

عدد احاطه‌گری گراف $\overline{C_n}$ $(n \geq ۴)$ همواره برابر ۲ است. می‌دانیم درجهٔ تمام رأس‌های گراف C_n برابر ۲ است، پس در گراف $\overline{C_n}$، هر رأس فقط با دو رأس دیگر مجاور نیست. فرض کنید رأس a در گراف C_n با دو رأس b و c مجاور باشد. در این صورت قطعاً b و c در گراف C_n مجاور نیستند، چون در غیر این صورت دوری به طول ۳ شامل سه رأس a، b و c ایجاد می‌شود که در گراف‌های C_n $(n \geq ۴)$ امکان‌پذیر نیست، بنابراین رأس a، $n - ۲$ رأس گراف $\overline{C_n}$ به جز b و c را احاطه می‌کند و با توجه به مجاور بودن b و c در گراف $\overline{C_n}$، هر کدام از مجموعه‌های $\{a , b\}$ یا $\{a , c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف $\overline{C_n}$ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

درجات رئوس این گراف تنها می‌تواند به صورت ۱ , ۲ , ۲ , ۲ , ۳ , ۴ باشد. طبق صورت سؤال این گراف دوری به طول بزرگ‌تر از ۳ ندارد، پس تنها به صورت زیر قابل رسم است:



مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف عبارتند از:

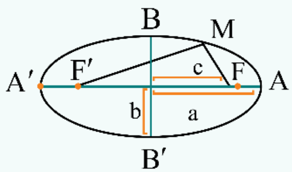
$\{a , c\} , \{a , d\} , \{c, f\} , \{c ,e\} , \{b , d , e\} , \{b , d , f\}$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

خلاصه‌ای از بیضی:

بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل هر نقطه روی آن، از ۲ نقطه‌ی ثابت (به نام کانون‌ها) مقدار ثابتی (برابر قطر بزرگ) می‌شود.



$$MF + MF' = ۲a$$

$$\left.\begin{array}{l} A'A = \text{قطر بزرگ} = ۲a \\ B'B = \text{قطر کوچک} = ۲b \\ F'F = \text{فاصله کانونی} = ۲c \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{رابطه‌ی بین } c,b,a} a^۲ = b^۲ + c^۲$$

پاسخ تشریحی:

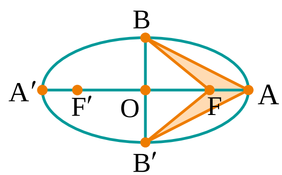
چون کانون‌ها عرض یکسان دارند پس بیضی افقی است. M روی بیضی است و عرض آن با عرض کانون‌ها برابر است، در نتیجه M رأس کانونی بیضی است:

$$FF' = ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳$$

$$MF + MF' = ۸ = ۲a \Rightarrow a = ۴$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b = \sqrt{۷}$$

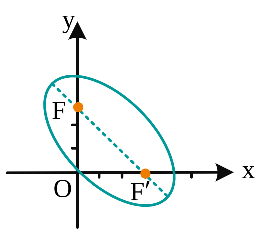
چهارضلعی گفته شده به صورت زیر است و مساحت آن برابر است با:



$$S_{\text{چهارضلعی}} = ۲(\frac{۱}{۲} \times b \times (a - c)) = \sqrt{۷} \times ۱ = \sqrt{۷}$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- در شکل زیر، خطی در نقطهٔ F بر قطر بزرگ بیضی عمود می‌کنیم تا بیضی را در نقطه‌های M و N قطع کند. مساحت $\overset{\triangle}{MNF'}$ کدام است؟



۱) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $۳\sqrt{۲}$

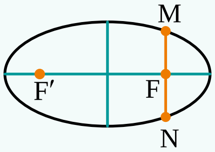
۳) $۶\sqrt{۲}$

۴) $۹\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

وتر کانونی:

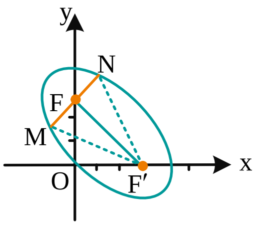
اگر در کانون بیضی (F یا F') خطی عمود بر قطر بزرگ رسم کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، MN را وتر کانونی می‌گوییم و اندازه‌ی آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل داده شده:



$$|OF| + |OF'| = 2a \Rightarrow 3 + 3 = 2a \Rightarrow a = 3$$

$$|FF'| = 2c = 3\sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

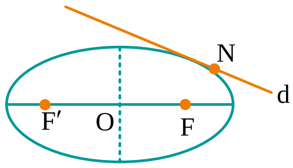
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = b^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

می‌دانیم طول پاره‌خط MN یا همان وتر کانونی برابر $\frac{2b^2}{a}$ است و مساحت $\overset{\triangle}{MNF'}$، مساحت مثلثی با قاعده MN و ارتفاع FF' است:

$$S_{\overset{\triangle}{MNF'}} = \frac{1}{2} \times |MN| \times |FF'| = \frac{1}{2} \times \frac{2b^2}{a} \times 2c = \frac{2b^2c}{a} = \frac{2 \times \frac{9}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- **در بیضی شکل زیر، مجموع فواصل هر نقطه‌ای روی بیضی از دو کانون بیضی برابر با m است. اگر خط d در نقطه N بر بیضی مماس شده باشد و خط Δ را به موازات FN به گونه‌ای رسم کنیم که از F' گذشته و خط d را در نقطه M که به فاصله n واحد از امتداد NF قرار دارد، قطع کند، مساحت چهارضلعی $MNFF'$ کدام است؟**

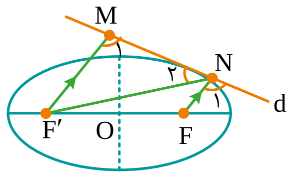


۱) $\frac{mn}{2}$
۲) $\frac{mn}{4}$
۳) mn
۴) $2mn$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

با توجه به توضیحات داده شده در سوال خواهیم داشت:



$$|NF| + |NF'| = m$$

می‌دانیم در هر بیضی: $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$ (۱)

از طرفی، $FN \parallel F'M$ و d مورب: $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$ (۲)

$$(1),(2): \hat{M}_1 = \hat{N}_2 \Rightarrow MF' = NF' \Rightarrow MF' + NF = m$$

از طرفی، طول ارتفاع ذوزنقه برابر فاصلهٔ امتداد NF و MF' یعنی n است، بنابراین مساحت ذوزنقه $MNFF'$ برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}((MF' + NF) \times n) = \frac{mn}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- **در یک بیضی با طول قطر بزرگ 2a، اگر فاصله دو کانون را برابر 2c در نظر بگیریم و بین این دو پارامتر، رابطه $5ac = 2(a^2 + c^2)$ برقرار باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟**

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۶۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

خروج از مرکز بیضی (e):

پارامتری است که کشیدگی یا فشردگی بیضی را نشان می‌دهد.

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\xrightarrow[\text{۰<e<۱ می‌باشد}]{\text{چون c<a پس}}\begin{cases}e\to 0 & \text{بیضی گردتر و شبیه دایره دیده می‌شود}\\ e\to 1 & \text{بیضی کشیده‌تر و شبیه پاره‌خط دیده می‌شود}\end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم خروج از مرکز بیضی از رابطهٔ $e=\frac{c}{a}$ به دست می‌آید. بنابراین طرفین رابطه داده شده را بر a^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 5\frac{c}{a}=2\left(1+\left(\frac{c}{a}\right)^2\right)\Rightarrow 5e=2+2e^2\Rightarrow 2e^2-5e+2=0$$

$$\Delta=25-4(4)=9$$

$$e=\frac{5\pm 3}{4}\begin{cases}e=2 & \text{غ ق ق زیرا } 0<e<1 \text{ می‌باشد}\\ e=\frac{1}{2}\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

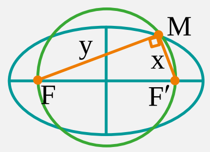
۲۵- بیضی به مرکز $O(5,-3)$ بر محورهای مختصات مماس است. دایره‌ای با همین مرکز و شعاع ۴، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{MFF'}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

نکته:

مساحت مثلث $\overset{\triangle}{MFF'}$ برابر b^2 است. زیرا:



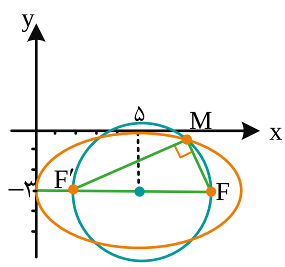
$$|MF'|=x \qquad |MF|=y$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=(2c)^2=4c^2 \;(1)\\ x+y=2a\xrightarrow{\text{توان ۲}}\underbrace{x^2+y^2}_{4c^2}+2xy=4a^2\Rightarrow 2xy=4a^2-4c^2\Rightarrow xy=2a^2-2c^2=2b^2\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\times 2b^2=b^2$$

پاسخ تشریحی:

بیضی گفته شده به صورت مقابل است. در نتیجه:



$$a=5$$
$$b=3$$
$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 25=9+c^2\Rightarrow c=4$$

چون شعاع دایره c است، از دو کانون می‌گذرد، در نتیجه $\hat{M}=90^\circ$ است.

$$S_{\overset{\triangle}{MFF'}}=b^2=9$$

گروه آموزشی ماز

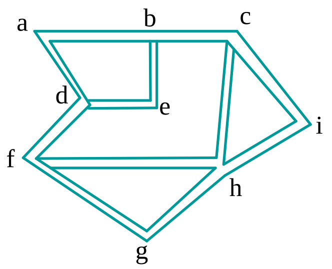
۲۶- شکل مقابل، نقشه منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی از تقاطع‌ها، دستگاه خودپرداز نصب کنیم که سه شرط زیر برقرار باشد:

الف: هر فرد یا در هر تقاطع به خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا با حداکثر رفتن به یکی از تقاطع‌های مجاورش دسترسی پیدا کند.

ب: حتماً در تقاطع **e** خودپرداز نصب شود.

ج: با کمترین تعداد خودپرداز، کار صورت گیرد.

این کار به چند روش انجام می‌شود؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

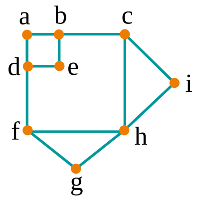
پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

مجموعه‌ی احاطه‌گر:

فرض کنید D زیرمجموعه‌ی شامل رأس‌های گراف G باشد، اگر هر رأس از گراف یا در مجموعه‌ی D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی D را احاطه‌گر می‌گوییم.

پاسخ تشریحی:

ابتدا گراف زیر را مدل‌سازی می‌کنیم. باید مجموعه احاطه‌گر با کمترین تعداد عضو بنویسیم که شامل رأس e باشد. دقت کنید حداقل به ۳ خودپرداز احتیاج داریم. مجموعه‌های زیر جواب می‌باشد.



$\{h,e,a\},\{h,e,b\},\{h,e,d\}$

گروه آموزشی ماز

۲۷- در جدول زیر فاصله مستقیم بین ۵ روستای a,b,c,d و e را نمایش داده‌ایم. می‌خواهیم در برخی از روستاها بیمارستان احداث کنیم که هر روستا با نزدیک‌ترین بیمارستان حداکثر ۲۵ کیلومتر فاصله داشته باشد. برای حل مسئله، گراف **G** را مدل‌سازی کرده‌ایم. حاصل $q(G)+\gamma(G)$ کدام است؟

	a	b	c	d	e
a	۰	۲۵	۱۰	۳۰	۲۵
b	۲۵	۰	۳۰	۸	۲۵
c	۱۰	۳۰	۰	۴۰	۵۰
d	۳۰	۸	۴۰	۰	۲۵
e	۲۵	۲۵	۵۰	۲۵	۰

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۶

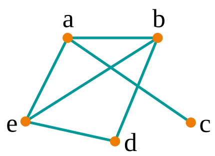
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم:

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه‌ای که کمترین تعداد عضو را دارد، مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای این مجموعه را، عدد احاطه‌گری گراف G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

پاسخ تشریحی:

ابتدا گراف G را مدل‌سازی می‌کنیم. دقت کنید دو رأسی را به هم وصل می‌کنیم که فاصله مستقیم آن‌ها بیشتر از ۲۵km نباشد.

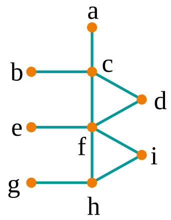


در این گراف $p=۵$ و $q=۶$ می‌باشد و مجموعه $\{a,d\}$ یک $\gamma-$مجموعه می‌باشد، پس $\gamma(G)=۲$ است و داریم:

$q(G)+\gamma(G)=۸$

گروه آموزشی ماز

۲۸- **فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر دلخواه گراف مقابل باشد. D با کدام مجموعه می‌تواند اشتراک نداشته باشد؟**



۱) $\{a,b,c,d,f\}$

۲) $\{g,h\}$

۳) $\{g,e,b,a,i\}$

۴) $\{i,h,f,e\}$

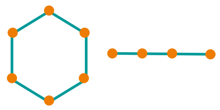
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

فرض کنید $D=\{c,f,h\}$ باشد. D برای گراف G احاطه‌گر است. اما با گزینه ۳، اشتراک ندارد.

گروه آموزشی ماز

۲۹- **گراف مقابل چند $\gamma-$مجموعه دارد؟**



۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۴

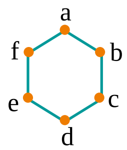
۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

ابتدا تعداد $\gamma-$مجموعه‌های C_6 و P_4 را محاسبه می‌کنیم.

الف) در گراف



، $\gamma(G)=۲$ و $\{a,d\},\{b,e\},\{c,f\}$، $\gamma-$مجموعه هستند.

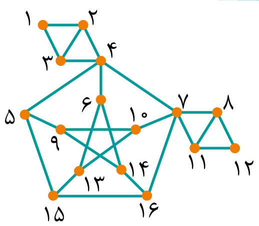
ب) در گراف

$\gamma(G)=۲$ و $\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\}$، $\gamma-$مجموعه هستند.

گراف G از اجتماع C_6 و P_4 ساخته شده است. پس $\gamma(G)=۲+۲=۴$ می‌باشد. هر γ مجموعه گراف ۴ عضوی است که ۲ عضو آن C_6 و ۲ عضو دیگر P_4 را احاطه می‌کند، پس $۱۲=۴\times۳$، γ مجموعه داریم.

گروه آموزشی ماز

۳۰- **کدام گزینه برای گراف مقابل، احاطه‌گر مینیمال نمی‌باشد؟**



۱) $\{۴,۱۳,۱۴,۱۱,۱\}$

۲) $\{۴,۷,۱۶,۱۵,۵,۳,۱۲\}$

۳) $\{۵,۷,۱۳,۱۴,۶,۲,۸\}$

۴) $\{۷,۱۲,۱,۴,۱۳,۹\}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

در مجموعه $\{۵,۷,۱۳,۱۴,۶,۲,۸\}$، اگر رأس ۱۳ حذف شود، مجموعه هنوز احاطه‌گر است، پس مینیمال نمی‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۱- اگر بازتاب خط $۲y-۲x=m-۱$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، بر خود خط، تصویر شود، بازتاب نقطه $A(-۱,m)$ نسبت به محور yها کدام است؟

۱) $(۱,-۱)$ ۲) $(۱,۱)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-۱,۳)$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

بازتاب‌های معروف:

$$S(x,y)\xrightarrow{\text{نسبت به محور } x}(x,-y)$$

$$S(x,y)\xrightarrow{\text{نسبت به محور } y}(-x,y)$$

$$S(x,y)\xrightarrow{\text{نسبت به خط } y=x}(y,x)$$

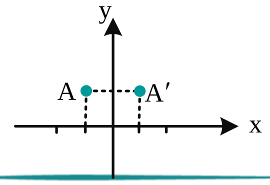
$$S(x,y)\xrightarrow{\text{نسبت به خط } y=-x}(-y,-x)$$

پاسخ تشریحی:

اگر بازتاب خط d نسبت به خط L، خود خط d شود یا d بر L عمود و یا d و L منطبق‌اند. در نتیجه در این سوال، چون دو خط $۲y=۲x+(m-۱)$ و $y=x$ موازی‌اند، پس امکان عمود شدن ندارند، در نتیجه بر هم منطبق‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} ۲y-۲x=m-۱\xrightarrow{\div ۲}y-x=\dfrac{m-۱}{۲} \\ \text{نیمساز نواحی (۱) و (۳)} \quad y-x=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{m-۱}{۲}=۰\Rightarrow m=۱$$

$$\Rightarrow m=۱\Rightarrow A(-۱,m)=(-۱,۱)\xrightarrow{\text{بازتاب نسبت به محور } y}A'(۱,۱)$$



۳۲- چه تعداد از جملات زیر درست است؟

- در دوران، مرکز دوران و در تجانس، مرکز تجانس، نقطه ثابت محسوب می‌شود.
- انتقال، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.
- در تبدیل همانی، همواره یک نقطه ثابت داریم.
- بردار انتقالی وجود ندارد که دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع را روی هم تصویر کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

بررسی موارد:

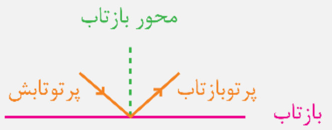
- درست است.
- انتقال در حالت کلی نقطه ثابت ندارد. بنابراین، این گزاره نادرست است.
- در تبدیل همانی، تمام نقاط صفحه، نقطه ثابت هستند، بنابراین بی‌شمار نقطه ثابت دارد. در نتیجه این گزاره نادرست است.
- این گزاره درست است. چون دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع متقاطعند، بردار انتقالی وجود ندارد که این دو را روی هم تصویر کند.

۳۳- تحت یک بازتاب نسبت به خط L، نقطه $(-۲,۱)$ روی نقطه $(-۴,۳)$ تصویر می‌شود. کدام نقطه روی خط L قرار دارد؟

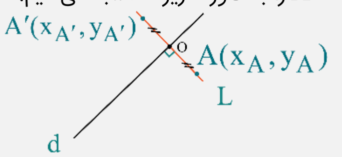
۱) $(۱,۴)$ ۲) $(۲,-۴)$ ۳) $(۰,-۱)$ ۴) $(۰,-۲)$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

بازتاب:



مطابق شکل زیر اگر بخواهیم نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ را نسبت به خط d بازتاب دهیم، کافی است شیب خط d را محاسبه کرده و بعد قرینه و معکوس کنیم و معادله‌ی خط عمود بر d و گذرنده از A (خط L) را بنویسیم. برخورد خط d و L یعنی نقطه‌ی O را محاسبه می‌کنیم و بعد مختصات A' را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{A+A'}{۲}=O\to A'=۲O-A\to\begin{cases}x_{A'}=۲x_O-x_A\\ y_{A'}=۲y_O-y_A\end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم خط L، عمودمنصف بین دو نقطه $(-۲,۱)$ و $(۳,-۴)$ است، بنابراین:

$$\begin{matrix} A(-۲,۱) \\ B(۳,-۴) \end{matrix} \Rightarrow m_{AB} = \frac{-۴-۱}{۳+۲} = \frac{-۵}{۵} = -۱$$

خط L بر AB عمود است پس شیب آن ۱ است. $m_L = ۱$

نقطه وسط A و B، $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۳}{۲})$ است، بنابراین معادلهٔ L به صورت زیر است:

$$y + \frac{۳}{۲} = ۱(x - \frac{۱}{۲}) \Rightarrow y = x - ۲$$

فقط نقطهٔ $(۰,-۲)$ روی L قرار دارد پس گزینهٔ ۴ درست است.

گروه آموزشی ماز

۳۴- به کمک چه تعداد بردار انتقال، خط $d_۱ : x - ۲y = ۳$ به خط $d_۲ : ۴y - ۲x = ۵$ تبدیل می‌شود؟

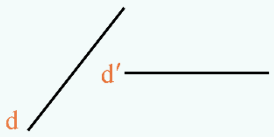
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) چنین بردار انتقالی وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

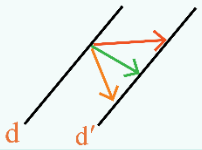
بردار انتقال:

اگر بخواهیم نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ را به کمک بردار $\vec{v} = (m,n)$ انتقال دهیم، آن‌گاه: $T(x_A, y_A) = (x_A + m, y_A + n)$. انتقال تبدیلی است که شیب خط را حفظ می‌کند. بنابراین دو خط موازی با بی‌شمار بردار انتقال به هم تبدیل می‌شوند اما هیچ انتقالی وجود ندارد که بتواند دو خط غیرموازی را به هم تبدیل کند.

با هیچ بردار انتقالی d و d′ به هم تبدیل نمی‌شوند

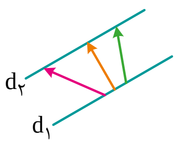


با بی‌شمار بردار انتقال d به d′ تبدیل می‌شود و بالعکس



پاسخ تشریحی:

دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با هم موازیند ($m_۱ = m_۲ = \frac{۱}{۲}$)، در نتیجه بی‌شمار بردار انتقال برای تبدیل $d_۱$ به $d_۲$ وجود دارد.



گروه آموزشی ماز

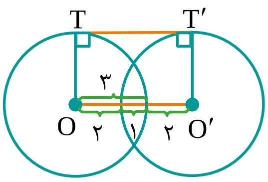
۳۵- دایره‌ای به شعاع ۳ را به کمک بردار انتقالی به طول ۵، انتقال می‌دهیم. اگر خط المرکزین دو دایره را رسم و از مراکز دو دایره، به نقطه تماس مماس مشترک خارجی و دایره‌ها وصل کنیم، یک چهارضلعی ایجاد می‌شود. مساحت آن کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

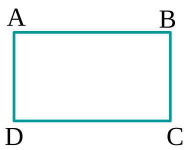
پاسخ تشریحی:

چهارضلعی ایجاد شده مستطیل و مساحت آن $۱۵ = ۵ \times ۳$ است.



گروه آموزشی ماز

۳۶- مستطیل زیر را در نظر بگیرید. چند نقطه می‌توان داخل صفحه این مستطیل در نظر گرفت که در تجانس نسبت به آن نقطه، ضلع BC تصویر ضلع AD و ضلع CD تصویر ضلع AB شود؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

تجانس یعنی چی؟

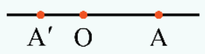
اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ نسبت تجانس باشد، آن‌گاه A' را مجانس نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی O با نسبت تجانس k می‌گوییم در صورتی که A و A' و O روی یک خط راست باشند، بنابراین:

$$k > 1 \rightarrow \frac{OA'}{OA} = k$$

چون $k > 0$ است A و A' در یک طرف O قرار دارند و چون $k > 1$ است A' دورتر از A نسبت به O می‌باشد.

$$0 < k < 1 \rightarrow \frac{OA'}{OA} = k$$

چون $k > 0$ است A و A' در یک طرف O قرار دارند و چون $0 < k < 1$ است A' نزدیک‌تر از A نسبت به O می‌باشد.



$$k < 0 \rightarrow \frac{OA'}{OA} = |k|$$

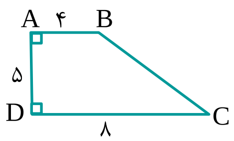
چون $k < 0$ است A و A' در دو طرف O قرار دارند.

پاسخ تشریحی:

باید نقطه داخل مستطیل باشد، زیرا خطوط گفته شده در طرفین آن نقطه می‌باشند و با هم موازیند. اگر محل برخورد دو قطر را O بنامیم، می‌توانیم با تجانس نسبت به O و نسبت $(k = -1)$، AD را روی BC و AB را روی CD تصویر کنیم.

گروه آموزشی ماز

۳۷- استخری به شکل ذوزنقه، مطابق شکل زیر می‌باشد. شخصی از نقطه B می‌خواهد به نقطه‌ای مانند M روی ساق AD به طول ۵ برود و سپس تا نقطه C شنا کند. کمترین طول BMC کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۳

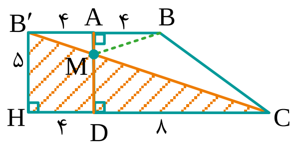
۳) ۱۴

۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

نقطهٔ B را نسبت به AD بازتاب می‌دهیم تا B' به دست آید. بنابراین، اگر شکل زیر را در نظر بگیریم:



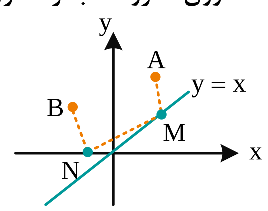
$$(BMC)_{min} = |BM| + |MC| = |B'M| + |MC| = |B'C|$$

$$|B'C|^۲ = |B'H|^۲ + |HC|^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹$$

$$|B'C| = ۱۳$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- نقاط $A(۲,۵)$ و $B(-۳,۲)$ را در صفحه مختصات مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر نقطه M روی نیمساز ربع ۱ و ۳ و نقطه N روی محور xها بلغزد، طول کوتاه‌ترین مسیر AMNB کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۵}$

۲) ۴

۳) $\sqrt{۲۹}$

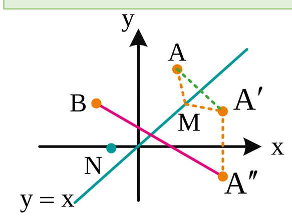
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

ابتدا قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نیمساز ربع اول و سوم را به دست می‌آوریم: $A'(۵,۲)$

سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و نقطه $A''(۵,-۲)$ به دست می‌آید. در نهایت:



$$|A''B| = \sqrt{(-۳-۵)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۶۴+۱۶} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- اگر نقاط A و B یک‌بار به فاصله‌های ۱۲ و ۸ از خط d و در دو طرف آن و بار دیگر در یک سمت خط d قرار داشته باشند و بدانیم فاصله پای عمود آن‌هاروی خط d از هم برابر ۸ است و نقطه M نقطه‌ای متغیر روی خط d است. حداکثر مقدار $|MA-MB|$ در حالت اول و دوم کدام است؟

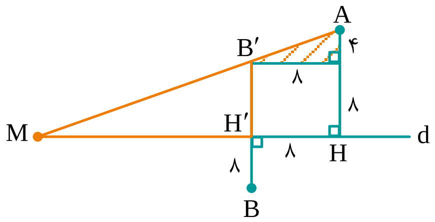
۱) ۲۰,۱۶ ۲) $۴\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۱۳}, ۴\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۱۳}, ۱۷$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

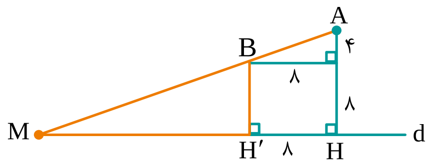
با توجه به توضیحات سوال خواهیم داشت:

حالت اول: A و B در دو طرف خط



$$|MA-MB|\ \text{حداکثر} = |AB'| = \sqrt{۶۴+۱۶} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

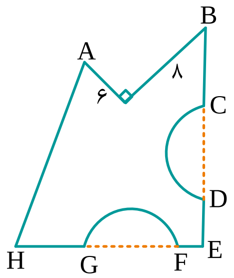
حالت دوم: A و B در یک طرف خط



$$|MA-MB|\ \text{حداکثر} = |AB| = \sqrt{۶۴+۱۶} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- در شکل زیر، $AB=CD=۲FG$ و CD و FG نیم‌دایره هستند. اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر است؟

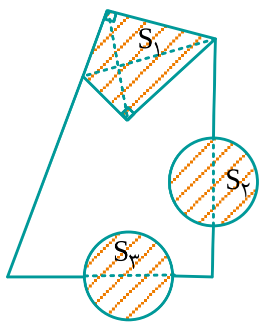


۱) $۴۸+۳۰\pi$
۲) $۲۴+۱۵/۷۵\pi$
۳) $۲۴+۶۲/۵\pi$
۴) $۴۸+۳۱/۲۵\pi$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

نیم دایره‌ها را نسبت به CD و FG و مثلث را نسبت به AB بازتاب می‌دهیم. بنابراین:



$$|AB|^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow |AB| = ۱۰$$

$|FG| = ۵$ و $|CD| = ۱۰$

$$S_۱ = ۲(\frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸) = ۴۸$$

$$S_۲ = \pi(۵)^۲ = ۲۵\pi$$

$$S_۳ = \pi(\frac{۵}{۲})^۲ = \frac{۲۵}{۴}\pi = ۶/۲۵\pi$$

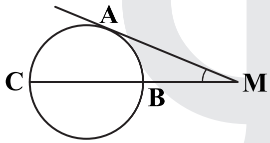
$$\Rightarrow \text{افزایش مساحت}: S_۱ + S_۲ + S_۳ = ۴۸ + ۳۱/۲۵\pi$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر با نصف کمان مقابل آن است.

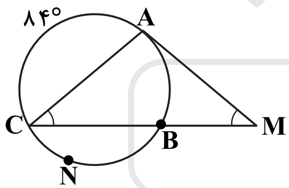
نکته: در شکل روبه‌رو داریم:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$

با توجه به نکات داریم:

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \quad (۱) \qquad \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲} \quad (۲)$$



مثلث AMC متساوی‌الساقین است:

$$MA = AC \Rightarrow \hat{M} = \hat{C} \xrightarrow[(۲)]{(۱)} \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \frac{۸۴° - \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۴۲°$$

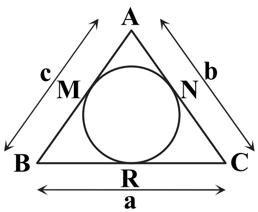
حالا اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BNC}$ به راحتی قابل‌محاسبه است:

$$\overset{\frown}{BNC} = ۳۶۰° - \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} = ۳۶۰° - ۸۴° - ۴۲° = ۲۳۴°$$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱)

نکتهٔ ۱: اگر S مساحت مثلث و P برابر با نصف محیط مثلث باشد، r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید: $r = \frac{S}{P}$

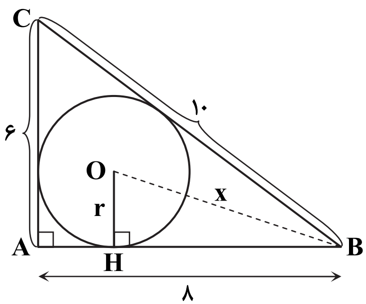
نکتهٔ ۲: در مثلث ABC روبه‌رو داریم: (P نصف محیط مثلث است.)



$$AM = AN = P - a$$
$$BM = BR = P - b$$
$$CN = CR = P - c$$

چون $۱۰^۲ = ۶^۲ + ۸^۲$، پس مثلث قائم‌الزاویه است.

طبق شکل روبه‌رو و با استفاده از نکات فوق داریم:



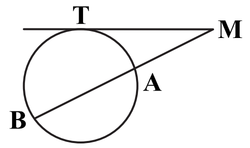
$$\begin{cases} S = \frac{۶ \times ۸}{۲} = ۲۴ \\ P = \frac{۶ + ۸ + ۱۰}{۲} = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow r = \frac{S}{P} = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲$$

$$BH = P - b = ۱۲ - ۶ = ۶$$

$$x = OB = \sqrt{r^۲ + BH^۲} = \sqrt{۴ + ۳۶} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❊ هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۱)**

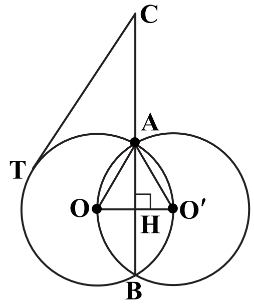
نکته: اگر از نقطهٔ M خارج دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم، داریم:



$$MT^{۲} = MA \cdot MB$$

نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ ارتفاع برابر با $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است.

طبق شکل زیر داریم:



$$OO' = AO = AO' = ۱$$

مثلث AOO' متساوی‌الاضلاع است، پس داریم:

$$AH = HB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

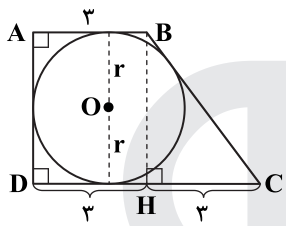
$$AB = ۲AH = \sqrt{۳} \Rightarrow AC = AB = \sqrt{۳} \Rightarrow CB = ۲AC = ۲\sqrt{۳}$$

$$CA \times CB = CT^{۲} \Rightarrow CT = \sqrt{CA \times CB} = \sqrt{\sqrt{۳} \times ۲\sqrt{۳}} = \sqrt{۶}$$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❊ هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱)**

نکته: در چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابر است.

طبق نکتهٔ فوق داریم:



$$AD + BC = AB + DC = ۳ + ۶ \Rightarrow BC = ۹ - AD \quad (۱)$$

با توجه به شکل، مشخص است که قطر دایره محاطی همان اندازهٔ ضلع AD است، در مثلث BHC داریم:

$$BH^{۲} + CH^{۲} = BC^{۲} \xrightarrow{BH=AD} AD^{۲} + ۳^{۲} = BC^{۲} \xrightarrow{(۱)} AD^{۲} + ۹ = (۹ - AD)^{۲}$$

$$\Rightarrow AD^{۲} + ۹ = ۸۱ - ۱۸AD + AD^{۲} \Rightarrow ۱۸AD = ۸۱ - ۹ \Rightarrow ۱۸AD = ۷۲$$

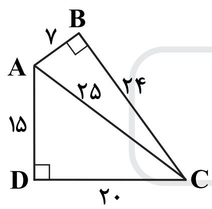
$$\Rightarrow AD = ۴ \Rightarrow ۲r = ۴ \Rightarrow r = ۲$$

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار ❊ هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱)**

نکته: در هر چهارضلعی محاطی، زوایای مقابل، مکمل هستند.

در مثلث ABC داریم:

$$۷^{۲} + ۲۴^{۲} = ۲۵^{۲} \Rightarrow ۴۹ + ۵۷۶ = ۶۲۵ \Rightarrow \hat{B} = ۹۰^{\circ}$$



طبق نکتهٔ فوق، در هر چهارضلعی محاطی، مجموع زوایای روبه‌رو ۱۸۰° است، پس:

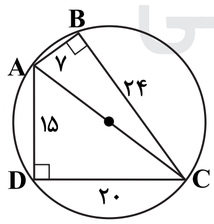
$$\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^{\circ} \Rightarrow \hat{D} = ۹۰^{\circ}$$

$$\overset{\triangle}{ADC} : DC = \sqrt{۲۵^{۲} - ۱۵^{۲}} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{ADC}} = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۲۴ + \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۲۰ = ۸۴ + ۱۵۰ = ۲۳۴$$

چون زوایای B و D برابر ۹۰° هستند، پس مطابق شکل، AC قطر دایره محیطی است:

خواستهٔ سؤال برابر است:



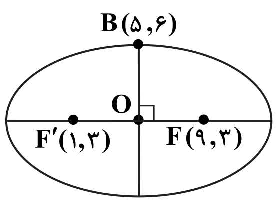
$$R = \frac{AC}{۲} = \frac{۲۵}{۲}$$

$$\frac{S}{R} = \frac{۲۳۴}{\frac{۲۵}{۲}} = \frac{۴۶۸}{۲۵} = ۱۸/۷۲$$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: ساده ❊ هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)**

نکته: در هر بیضی رابطهٔ $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$ برقرار است و اندازهٔ قطر بزرگ بیضی برابر $۲a$ است.

می‌دانیم مرکز بیضی، وسط کانون‌ها قرار دارد، با توجه به اینکه عرض نقاط F و F' یکسان است، بیضی افقی است و با در نظر گرفتن شکل روبه‌رو داریم:



$$O = \frac{F + F'}{۲} = (۵,۳) \text{ مرکز بیضی}$$

$$b = OB = \sqrt{(۵-۵)^{۲} + (۶-۳)^{۲}} = ۳$$

$$۲c = FF' = \sqrt{(۹-۱)^{۲} + (۳-۳)^{۲}} = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

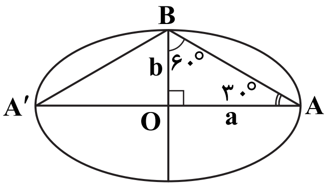
$$a = \sqrt{b^{۲} + c^{۲}} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

$$۲a = ۲ \times ۵ = ۱۰ : \text{قطر بزرگ}$$

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❋ هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)**

نکتهٔ: در هر بیضی، رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است که a، نصف قطر بزرگ، b، نصف قطر کوچک و c، نصف فاصلهٔ کانونی بیضی است.

نکته: در هر بیضی، نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند.



$$A'\hat{B}A = ۱۲۰° \Rightarrow O\hat{B}A = \frac{۱۲۰°}{۲} = ۶۰° \Rightarrow B\hat{A}O = ۳۰°$$

$$\tan ۳۰° = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

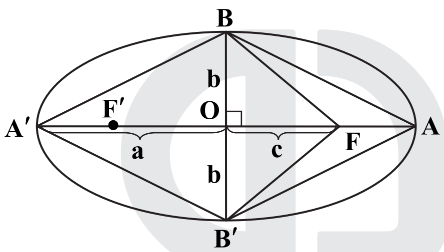
خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}}{a} = \sqrt{\frac{a^۲ - b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❋ هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)**

نکته: در هر بیضی، نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند.

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$A'F = a + c \ , \ AF = a - c$$

$$\begin{cases} S_{A'BFB'} = ۲S_{\overset{\triangle}{A'BF}} = ۲ \times \frac{۱}{۲} b(a+c) = b(a+c) \\ \\ S_{ABFB'} = ۲S_{\overset{\triangle}{ABF}} = ۲ \times \frac{۱}{۲} b(a-c) = b(a-c) \end{cases}$$

$$\frac{S_{A'BFB'}}{S_{ABFB'}} = ۴ \Rightarrow \frac{b(a+c)}{b(a-c)} = ۴ \Rightarrow a + c = ۴(a-c) = ۴a - ۴c$$

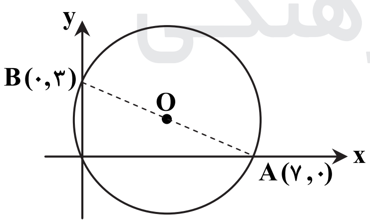
$$\Rightarrow ۳a = ۵c \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵}$$

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❋ هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)**

نکته: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به‌صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = r^۲$$

خط $۳x + ۷y = ۲۱$ محور xها را در نقطهٔ $(۷,۰)$ و محور yها را در نقطهٔ $(۰,۳)$ قطع می‌کند، پس نقطهٔ وسط این دو نقطه مرکز دایره است.



$$\text{مرکز دایره } O(\frac{۷+۰}{۲}, \frac{۰+۳}{۲}) = (\frac{۷}{۲}, \frac{۳}{۲})$$

$$\text{قطر دایره } AB = \sqrt{(۷-۰)^۲ + (۳-۰)^۲} = \sqrt{۴۹ + ۹} = \sqrt{۵۸}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره} = \frac{\sqrt{۵۸}}{۲}$$

حالا می‌توانیم معادلهٔ دایره را بنویسیم:

$$(x - \frac{۷}{۲})^۲ + (y - \frac{۳}{۲})^۲ = (\frac{\sqrt{۵۸}}{۲})^۲$$

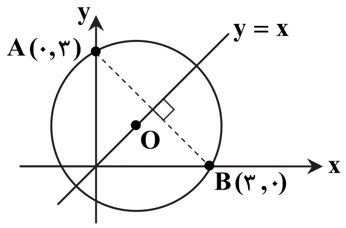
$$x^۲ - ۷x + \frac{۴۹}{۴} + y^۲ - ۳y + \frac{۹}{۴} = \frac{۵۸}{۴}$$

$$x^۲ + y^۲ - ۷x - ۳y + \frac{۵۸}{۴} = \frac{۵۸}{۴} \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۷x - ۳y = ۰$$

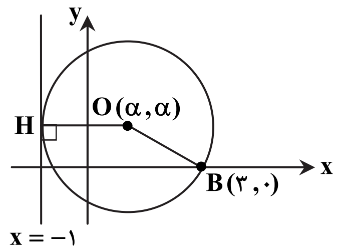
توجه: از آنجا که زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر، قائمه است، با کمی دقت می‌توان متوجه شد که در این سؤال می‌باید دایره از مبدأ مختصات عبور کند و $(۰,۰)$ می‌بایست در معادلهٔ دایره صدق کند. پس گزینه‌های ۳ و ۴ به سرعت حذف می‌شوند. فقط با دانستن مرکز دایره، گزینهٔ ۱ هم حذف می‌شود.

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❊ هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

وتر AB از دو نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(۳,۰)$ می‌گذرد. می‌دانیم که قطر دایره عمودمنصف وتر می‌باشد. پس مرکز این دایره روی خط $y = x$ قرار دارد. بنابراین مختصات مرکز به‌صورت $O(\alpha,\alpha)$ است.



فاصلهٔ مرکز دایره تا نقطهٔ $B(۳,۰)$ و خط $x = -۱$ برابر شعاع دایره است.



$$OH = OB$$

$$\alpha+۱=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+\alpha^۲}=\sqrt{\alpha^۲-۶\alpha+۹+\alpha^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}۲}\alpha^۲+۲\alpha+۱=۲\alpha^۲-۶\alpha+۹\Rightarrow \alpha^۲-۸\alpha+۸=۰$$

$$\alpha=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴-۳۲}}{۲}=\frac{۸\pm۴\sqrt{۲}}{۲}=۴\pm۲\sqrt{۲}$$

شعاع این دایره دو مقدار می‌تواند داشته باشد که داریم:

$$\text{شعاع دایره} = OH=\alpha+۱=۵\pm۲\sqrt{۲}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر $۵-۲\sqrt{۲}$ است.

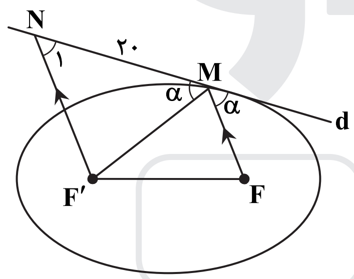
۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❊ هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

نکتهٔ: در هر بیضی، رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار است که a، نصف قطر بزرگ، b، نصف قطر کوچک و c، نصف فاصلهٔ کانونی بیضی است.

نکته: در هر بیضی، نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند.

نکته: مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون، برابر $2a$ است.

بر طبق خاصیت بازتابندگی در بیضی‌ها، زوایای α در شکل با هم برابرند.



$$MF \parallel NF' \Rightarrow \hat{N}_۱=\hat{\alpha}$$

پس مثلث MNF' متساوی‌الساقین است و داریم:

$$NF'=MF'$$

$$\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\begin{cases}a=۵x\\c=۳x\end{cases}\Rightarrow b=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۲۵x^۲-۹x^۲}=۴x\Rightarrow ۲b=۸x=۲۴$$

$$\Rightarrow b=۱۲\ ,\ x=۳$$

$$a=۱۵\ ,\ c=۹\Rightarrow FF'=۲c=۱۸\ ,\ MF+MF'=۲a=۳۰$$

$$\text{محیط } MNF'F=MN+NF'+FF'+MF=۲۰+۱۸+(NF'+MF)=۳۸+(MF'+MF)=۳۸+۳۰=۶۸$$

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❊ آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۳)

نکته (فراوانی نسبی یک داده): با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کلّ داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده به‌دست می‌آید.

نکته: مجموع فراوانی‌های نسبی در هر بررسی آماری همیشه ۱ است.

نکته (میانگین موزون داده‌ها): اگر n دادهٔ $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n داشته باشیم به‌طوری که هریک از این داده‌ها به‌ترتیب دارای فراوانی $f_۱$، $f_۲$، ... و f_n باشند، میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\bar{x}_W$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}_W=\frac{\sum_{i=۱}^{n}f_ix_i}{\sum_{i=۱}^{n}f_i}=\frac{f_۱x_۱+f_۲x_۲+\cdots+f_nx_n}{f_۱+f_۲+\cdots+f_n}$$

طبق نکات فوق داریم:

داده‌ها	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
فراوانی نسبی	۰/۱۵	a	۰/۲۵	۰/۳	۰/۱

$$۰/۱۵+a+۰/۲۵+۰/۳+۰/۱=۱\Rightarrow a=۰/۲$$

$$\bar{x}_W=\sum_{i=۱}^{n}\frac{f_i}{n}\times x_i=(۰/۱۵\times۱۰)+(۰/۲\times۱۲)+(۰/۲۵\times۱۴)+(۰/۳\times۱۶)+(۰/۱\times۱۸)=۱/۵+۲/۴+۳/۵+۴/۸+۱/۸=۱۴$$

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۳)

نکته (میانگین موزون داده‌ها): اگر n دادهٔ $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n داشته باشیم به‌طوری که هریک از این داده‌ها به‌ترتیب دارای فراوانی $f_۱$، $f_۲$، ... و f_n باشند، میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\bar{x}_W$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}_W = \frac{\sum_{i=۱}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=۱}^{n} f_i} = \frac{f_۱x_۱ + f_۲x_۲ + \cdots + f_n x_n}{f_۱ + f_۲ + \cdots + f_n}$$

نکته: زاویهٔ مربوط به داده‌ای با فراوانی f_i در نمودار دایره‌ای از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \times ۳۶۰^\circ$$

طبق نکات فوق، داریم:

نشان‌دسته	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
فراوانی	۳	۴	۷	۵	x

$$۱۸/۴ = \frac{۱۱\times۳ + ۱۵\times۴ + ۱۹\times۷ + ۲۳\times۵ + ۲۷x}{۳+۴+۷+۵+x}$$

$$= \frac{۳۳+۶۰+۱۳۳+۱۱۵+۲۷x}{۱۹+x} \Rightarrow ۱۸/۴\times(۱۹+x) = ۳۴۱+۲۷x$$

$$\Rightarrow ۳۴۹/۶ + ۱۸/۴x = ۳۴۱ + ۲۷x \Rightarrow ۸/۶ = ۸/۶x \Rightarrow x = ۱$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{f_i}{n}\times ۳۶۰ = \frac{۱}{۳+۴+۷+۵+۱}\times ۳۶۰^\circ = \frac{۱}{۲۰}\times ۳۶۰^\circ = ۱۸^\circ$$

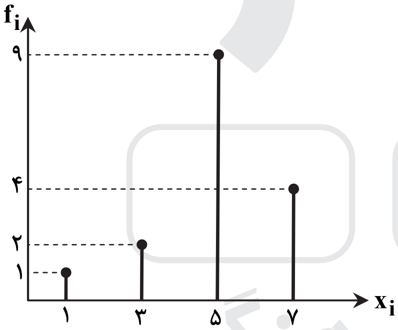
۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۳)

نکته (انحراف‌معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به‌صورت $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n داشته باشیم، انحراف‌معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به‌صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲}{n}} = \sqrt{\frac{(x_۱-\bar{x})^۲ + (x_۲-\bar{x})^۲ + \cdots + (x_n-\bar{x})^۲}{n}}$$

نکته: عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند میانهٔ داده‌ها می‌گوییم و آن را با $Q_۲$ نشان می‌دهیم.

$$\bar{x} = \frac{(۱\times۱)+(۲\times۳)+(۹\times۵)+(۴\times۷)}{۱+۲+۹+۴} = \frac{۸۰}{۱۶} = ۵ \quad : \text{میانگین}$$



$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^۲}{n} = \frac{۱(۱-۵)^۲ + ۲(۳-۵)^۲ + ۹(۵-۵)^۲ + ۴(۷-۵)^۲}{۱+۲+۹+۴}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۴۰}{۱۶} = ۲/۵ \Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sqrt{۲/۵}$$

تعداد کل داده‌ها ۱۶ تا است و داده‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$۱,۳,۳,\underbrace{۵,۵,\ldots,۵}_{\text{۹ تا}},۷,۷,۷,۷$$

میانه برابر می‌شود با میانگین دو دادهٔ هشتم و نهم که برابر است با: $\frac{۵+۵}{۲} = ۵$

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۳)

نکته (انحراف‌معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به‌صورت $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n داشته باشیم، انحراف‌معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به‌صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲}{n}} = \sqrt{\frac{(x_۱-\bar{x})^۲ + (x_۲-\bar{x})^۲ + \cdots + (x_n-\bar{x})^۲}{n}}$$

نکته (ضریب تغییرات داده‌ها): معیاری است که از تقسیم انحراف‌معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها ($\bar{x}$) به‌دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{(۷\times۱۴)+(۵\times۱۰)+(۴\times۱۱)}{۷+۵+۴} = \frac{۱۹۲}{۱۶} = ۱۲$$

اینک انحراف معیار داده‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{۷(۱۴-۱۲)^۲ + ۵(۱۰-۱۲)^۲ + ۴(۱۱-۱۲)^۲}{۱۶}} = \sqrt{\frac{۲۸+۲۰+۴}{۱۶}} = \sqrt{\frac{۵۲}{۱۶}} = \sqrt{\frac{۱۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲} \simeq ۱/۸$$

و در نهایت ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱/۸}{۱۲} = ۰/۱۵$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: تعداد رأس‌های گراف را مرتبهٔ گراف می‌گوییم و با p نشان می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف را اندازهٔ گراف می‌گوییم و با q نمایش می‌دهیم.

نکته: تعداد یال‌هایی که به هر رأس متصل هستند را درجهٔ آن رأس می‌نامیم و بزرگ‌ترین درجهٔ یک گراف را با Δ و کوچک‌ترین درجهٔ گراف را با σ نشان می‌دهیم.

نکته: اگر درجهٔ یک رأس عددی فرد باشد، آن را رأس فرد می‌نامیم و در هر گراف، تعداد رأس‌های فرد، عددی زوج است.

نکته: مجموع درجهٔ تمام رأس‌های هر گراف، دو برابر اندازهٔ گراف است؛ یعنی: $\sum_{i=۱}^{P} \deg(v_i) = ۲q$

حداقل اندازهٔ گراف G وقتی است که تمام رأس‌ها کمترین درجه را داشته باشند. چون تعداد رأس‌های فرد گراف عددی زوج است، در نتیجه هر ۱۱ رأس نمی‌توانند درجهٔ ۵ باشند. ۱۰ رأس را درجهٔ ۵ و یک رأس را درجهٔ ۶ در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$۲q = (۱۰ \times ۵) + ۶ = ۵۶ \Rightarrow q = ۲۸$$

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: تعداد رأس‌های گراف را مرتبهٔ گراف می‌گوییم و با p نشان می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف را اندازهٔ گراف می‌گوییم و با q نمایش می‌دهیم.

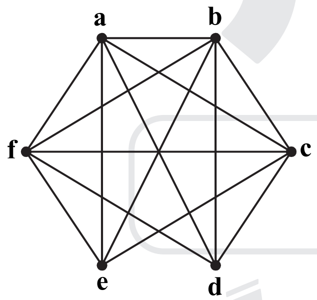
نکته: تعداد یال‌هایی که به هر رأس متصل هستند را درجهٔ آن رأس می‌نامیم.

چون درجهٔ رأس b برابر ۲ است، در نتیجه b باید به دو رأس از ۴ رأس دیگر وصل شود. یعنی $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت برای انتخاب این دو رأس داریم. از طرفی از چهار رأس a، c، d و e حداکثر $\binom{۴}{۲} = ۶$ یال می‌گذرد که ۲ یال از آن‌ها را لازم داریم، یعنی: $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ حالت برای آن وجود دارد. در نتیجه جواب برابر $۹۰ = ۱۵ \times ۶$ است.

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: دنبالهٔ $v_۱ v_۲ \cdots v_n v_۱$ $(n \geq ۳)$ از رأس‌های دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

نکته: در گراف کامل K_p، تعداد دورهای به طول ۳ از رابطهٔ $\binom{p}{۳}$ به‌دست می‌آید.



گراف با دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های داده‌شده را رسم می‌کنیم:
(رأس‌های a، b، c و f از درجهٔ ۵ و d و e درجهٔ ۴ هستند.)
این گراف همان گراف کامل $K_۶$ است که یال ed از آن حذف شده است. تعداد دورهای به طول ۳ در گراف کامل $K_۶$ برابر $\binom{۶}{۳} = ۲۰$ است که با حذف یال ed، دورهای $dced$، $dbed$، $daed$ و $dfed$ از آن کم می‌شود پس: $۲۰ - ۴ = ۱۶$ دور به طول ۳ خواهیم داشت.

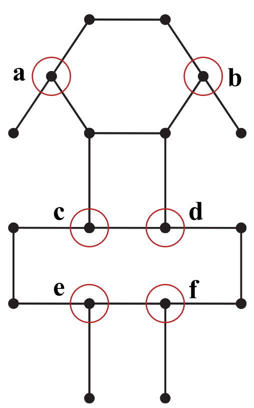
۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۲)

نکتهٔ ۱: زیرمجموعهٔ D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر گوییم هرگاه هر رأس G یا در آن باشد یا حداقل با یکی از اعضای آن مجاور باشد.

نکتهٔ ۲: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر G، مجموعه یا مجموعه‌هایی را که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم که اصطلاحاً $\gamma-$ مجموعه (گاما مجموعه) نیز نامیده می‌شود.

نکتهٔ ۳: تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری G نامیده و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به نکات، همان‌گونه که مشاهده می‌کنید مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است که ۶ عضو دارد. پس: $\gamma = ۶$



بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

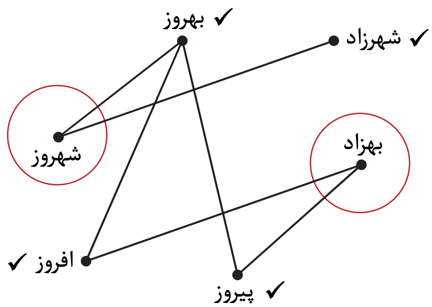
۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۲)**

نکتهٔ ۱: زیرمجموعهٔ D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر گوییم هرگاه هر رأس G یا در آن باشد یا حداقل با یکی از اعضای آن مجاور باشد.

نکتهٔ ۲: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر G، مجموعه یا مجموعه‌هایی را که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم که اصطلاحاً $\gamma-$ مجموعه (گاما مجموعه) نیز نامیده می‌شود.

نکتهٔ ۳: تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری G نامیده و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

برای مدل‌سازی مسئله، به‌ازای هر دانشجو، یک رأس در نظر می‌گیریم و رابطهٔ هم‌کلاسی بودن بین دو دانشجو را با یک یال نمایش می‌دهیم. شکل حاصل به‌صورت روبه‌رو است:



همان‌گونه که مشاهده می‌کنید با انتخاب بهزاد و شهروز، حداقل دو نفر انتخاب شده‌اند که همهٔ رئوس گراف را احاطه کرده‌اند.

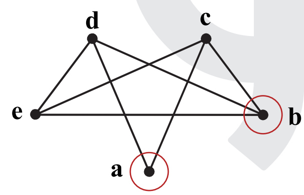
بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۲)**

نکتهٔ ۱: زیرمجموعهٔ D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر گوییم هرگاه هر رأس G یا در آن باشد یا حداقل با یکی از اعضای آن مجاور باشد.

نکتهٔ ۲: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر G، مجموعه یا مجموعه‌هایی را که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم که اصطلاحاً $\gamma-$ مجموعه (گاما مجموعه) نیز نامیده می‌شود.

نکتهٔ ۳: تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری G نامیده و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.



اگر گراف G کامل باشد، یعنی درجهٔ همهٔ رئوسش ۴ باشند، عدد احاطه‌گری برابر ۱ است. اما از آنجایی که قرار است $\gamma = ۲$ باشد، پس بایستی طوری یال کم کنیم تا همهٔ رئوس با یک رأس احاطه نشوند، پس بدین منظور از رأس a دو یال حذف می‌کنیم و یال بین دو رأس c و d را نیز حذف می‌کنیم تا گراف به‌شکل روبه‌رو درآید.

تعداد یال‌ها برابر است با:

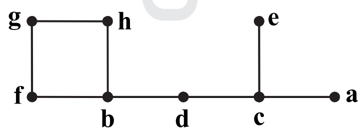
$$۲q = ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۲ \Rightarrow q_{max} = ۷$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۲)**

نکتهٔ ۱: زیرمجموعهٔ D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر گوییم هرگاه هر رأس G یا در آن باشد یا حداقل با یکی از اعضای آن مجاور باشد.

نکتهٔ ۲: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هریک از رئوسش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌گوییم.



با توجه به نکات و مطابق شکل، برای ساختن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، علاوه بر رئوس a و b بایستی رأس e نیز حتماً موجود باشد زیرا درجهٔ آن برابر ۱ است.

پس مجموعه‌های $\{a,b,e,g\},\{a,b,e,h\},\{a,b,e,f\}$ احاطه‌گر مینیمال هستند.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

تست و پاسخ ۱۹

یک تاس را دوبار پرتاب کرده‌ایم. چند پیشامد از فضای نمونه‌ای این آزمایش شامل حداقل یک بار ظاهرشدن عدد ۶ است؟

۱) 2^{25}

۲) $2^{25} \times 2047$

۳) 2^{11}

۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه فضای نمونه‌ای پرتاب هر تاس ۶ عضو دارد، پس فضای نمونه‌ای پرتاب n تاس، 6^n عضو دارد.

- **برآمد**: به هر یک از اعضای فضای نمونه‌ای یک برآمد یا یک حالت می‌گوییم، برای مثال در آزمایش پرتاب یک تاس، ۶ برآمد (حالت) داریم: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
- **پیشامد**: به هر زیرمجموعه از اعضای فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌گوییم.

نکته ۱ اگر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای nتا باشد، تعداد پیشامدها 2^n تا می‌شود.

۲ یک پیشامد زمانی رخ می‌دهد که حاصل آزمایش شامل حداقل یکی از اعضای آن باشد. مثلاً پیشامد زوج‌آمدن یک تاس یعنی $A = \{2,4,6\}$ را در نظر بگیرید.

اگر تاس ۲، ۴ یا ۶ بیاید این پیشامد رخ می‌دهد.

گام اول: فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس $36 = 6^2$ عضو دارد.

گام دوم: پیشامد این‌که در پرتاب دو تاس حداقل یک بار ۶ بیاید به صورت زیر است:

$$A = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\}$$

اگر حاصل آزمایش شامل حداقل یکی از این ۱۱ عضو باشد، این پیشامد رخ می‌دهد.

گام سوم: گفتیم فضای نمونه‌ای ۳۶ عضو دارد. برای این‌که پیشامد A رخ دهد، باید حداقل یکی از اعضای A انتخاب شوند که به $2^{11} - 1 = 2047$ حالت می‌توانیم یک زیرمجموعهٔ ناتهی از اعضای A را انتخاب کنیم.

گام چهارم: هر کدام از $36 - 11 = 25$ عضو دیگر فضای نمونه‌ای را می‌توانیم انتخاب کنیم یا نکنیم، پس 2^{25} حالت دارد، بنابراین جواب برابر $2^{25} \times 2047$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۰

هر یک از اعداد دورقمی که با ارقام ۲، ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم را روی یک کارت می‌نویسیم. تمام کارت‌ها را درون یک کیسه قرار می‌دهیم و به تصادف دو کارت از این کیسه خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مجموع اعداد دو کارت خارج‌شده بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خلوت حل هشت پیمانه: کافیه به این نکته توجه کنید که جمع دو عدد وقتی مضرب ۳ است که یا هر دو مضرب ۳ باشند، یا این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم یکی از اعداد بر ۳ برابر ۱ و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد دیگر بر ۳ برابر ۲ باشد.

پاسخ تشریحی: **گام اول**: تعداد کل اعداد دورقمی، با ارقام ۲، ۳ و ۴ و بدون تکرار ارقام برابر است با:

$$\underset{\substack{\text{یکی از ارقام}\\ \text{۲ یا ۳ یا ۴}}}{۳} \times \underset{\substack{\text{یکی از دو}\\ \text{رقم باقی‌مانده}}}{۲} = ۶$$

این ۶ عدد به صورت زیرند:

۲۳,۲۴,۳۲,۳۴,۴۲,۴۳

گام دوم: این ۶ عدد را برحسب باقیماندهٔ آن‌ها بر ۳ دسته‌بندی می‌کنیم:

$A = \{۲۴,۴۲\}$: اعداد بخش‌پذیر بر ۳

$B = \{۳۴,۴۳\}$: اعدادی که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۳ برابر ۱ است.

$C = \{۲۳,۳۲\}$: اعدادی که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۳ برابر ۲ است.

گام سوم: حالا برای این‌که دو عدد انتخاب کنیم و جمع آن‌ها مضرب ۳ باشد، دو حالت داریم:

حالت اول: دو عدد از مجموعهٔ A انتخاب کنیم که $\binom{۲}{۲} = ۱$ حالت دارد.

حالت دوم: یک عدد از مجموعهٔ B و یک عدد از مجموعهٔ C انتخاب کنیم:

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک عدد از B}} \times \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک عدد از C}} = ۲ \times ۲ = ۴$$

پس تعداد حالات مطلوب $۵ = ۱ + ۴$ تا است.

گام چهارم: تعداد کل حالات، برابر تعداد حالات انتخاب ۲ عدد از بین ۶ عدد، یعنی $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ تا است؛ بنابراین جواب مسئله برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

تست و پاسخ ۲۱

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، «مجموع دو عدد رو شده برابر با ۸» یا «هر دو عدد روشده، فرد» است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۳۶}$　　۴) $\frac{۱}{۱۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خلوت حل هشت پیمانه: تعداد حالات مطلوب ⇐ اجتماع دو پیشامد　　تعداد کل حالات ⇐ $۶ \times ۶ = ۳۶$

روش اول: **گام اول**: فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس $۳۶ = ۶ \times ۶$ عضو دارد.

گام دوم: پیشامد «مجموع دو عدد روشده برابر با ۸» را با A و پیشامد «هر دو عدد روشده فرد» را با B نمایش می‌دهیم.

می‌خواهیم «مجموع دو عدد روشده برابر با ۸» یا «هر دو عدد روشده فرد» باشند، یعنی تعداد اعضای $A \cup B$ را می‌خواهیم.

نکته: تعداد اعضای $A \cup B$ برابر است با: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

گام سوم: تعداد اعضای A، B و $A \cap B$ را به دست می‌آوریم:

$$A = \{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)\} \Rightarrow n(A) = ۵ \qquad n(B) = \underbrace{۳}_{\text{عدد اول فرد}} \times \underbrace{۳}_{\text{عدد دوم فرد}} = ۹$$

برای پیداکردن عضوهای $A \cap B$، کافی است در مجموعهٔ A، به دنبال اعضایی بگردیم که هر دو عدد آن‌ها فرد است:

بنابراین: $\Rightarrow A \cap B = \{(۳,۵),(۵,۳)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۲$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = ۹ + ۵ - ۲ = ۱۲$$

پس جواب برابر $\frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{۳۶}$ می‌شود.

روش دوم: برای حل سؤالاتی که در آن‌ها دو تاس پرتاب می‌شود و احتمال رخدادن یک پیشامد را می‌خواهیم، می‌توانیم جدولی به شکل مقابل رسم کنیم و در آن حالات مطلوب را مشخص کنیم.

برای مثال در جدول مقابل اعضای پیشامد A با دایره و اعضای پیشامد B با ضربدر مشخص شده‌اند. خانه‌هایی که هم دایره و هم ضربدر دارند، اعضای $A \cap B$ هستند.

تاس اول

تاس اول / تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	×		×		×	
۲						○
۳	×		×		⊗	
۴				○		
۵	×		⊗		×	
۶		○				

تاس دوم

با توجه به جدول بالا، تعداد اعضای $A \cup B$ برابر ۱۲ تا است (خانه‌هایی که حداقل یکی از دایره یا ضربدر را دارند)؛ پس جواب مسئله $\frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{۳۶}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۲

سکه‌ای پرتاب می‌کنیم. اگر شیر ظاهر شد سه سکهٔ دیگر و اگر خط ظاهر شد دو سکهٔ دیگر پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که همهٔ پرتاب‌ها یکسان ظاهر شوند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

کافیه نمودار درختی رسم کنید.

درس‌نامه: فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه ۲ حالت (شیر یا خط) دارد، پس فضای نمونه‌ای پرتاب n سکه، ۲^n عضو دارد.

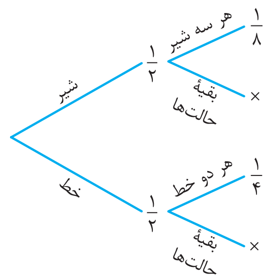
نکته: در پرتاب n سکه، در یک حالت همهٔ سکه‌ها شیر و در یک حالت همهٔ سکه‌ها خط می‌آیند.

گام اول: سکه‌ای که در ابتدای کار پرتاب می‌کنیم به احتمال $\frac{۱}{۲}$ شیر و به احتمال $\frac{۱}{۲}$ خط می‌آید. حالا اگر این سکه شیر

بیاید، سه سکه پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم همهٔ پرتاب‌ها یکسان ظاهر شوند، پس این سه سکه باید همگی شیر باشند که ۱ حالت است و احتمال آن $\frac{۱}{۸}$ می‌شود.

گام دوم: اگر سکه‌ای که در ابتدای کار پرتاب کردیم خط بیاید، دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. برای این‌که همهٔ پرتاب‌ها یکسان باشند، این دو سکه هم باید خط باشند که در ۱ حالت هر دو سکه خطاند و احتمال آن $\frac{۱}{۴}$ می‌شود.

گام سوم: نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



بنابراین جواب برابر $\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۸}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۳

تیم ملی والیبال ایران ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو بازیکنی برابر نیست. به ترتیب دو بازیکن انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم که قد بازیکن دوم کوتاه‌تر است. با چه احتمالی بازیکن اول، بلندقدترین بازیکن تیم است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$
۲) $\frac{۱}{۱۳}$
۳) $\frac{۱}{۱۰}$
۴) $\frac{۱}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خلوت‌حل‌هاش‌بیشه کافیه حواستون به این باشه که با سؤال احتمال شرطی مواجه هستیم.

درس‌نامه احتمال شرطی

احتمال رخ‌دادن پیشامد A به شرط این‌که بدانیم پیشامد B رخ داده را به صورت $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم که مقدار آن برابر است با:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

تکنیک ما برای حل سؤالات احتمال شرطی به این شکل است که ابتدا تعداد حالات شرط (یا همان B) را حساب می‌کنیم و در مخرج کسر قرار می‌دهیم (در اصل تعداد حالات شرط همان تعداد کل حالات می‌شود)

حالا تعداد حالت‌هایی را می‌شماریم که در آن‌ها هم شرط مسئله رخ داده *(شرط می‌شه همون B)* و هم پیشامد مطلوب ما *(پیشامد مطلوب ما می‌شه A)* و این مقدار را در صورت کسر قرار می‌دهیم تا جواب حاصل شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ۱۴ بازیکن داریم که قد هیچ دو بازیکنی برابر نیست. در صورت سؤال گفته به ترتیب دو بازیکن (مثلاً A و B) را انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم که قد بازیکن دوم کوتاه‌تر است. این همان شرط مسئلهٔ ما است. یعنی تعداد حالت‌هایی را می‌خواهیم که به ترتیب دو بازیکن انتخاب کنیم و قد اولی از قد دومی بلندتر باشد. به $\binom{۱۴}{۲}=۹۱$ حالت می‌توانیم دو بازیکن انتخاب کنیم. حالا چون قد همهٔ بازیکن‌ها متفاوت است، بازیکن بلندتر را بازیکن اول و بازیکن کوتاه‌تر را دوم در نظر می‌گیریم.

گام دوم: تعداد حالت‌هایی را می‌خواهیم که بازیکن اول بلندقدترین است، پس بازیکن دوم می‌تواند یکی از ۱۳ نفر بعدی باشد که ۱۳ حالت دارد؛ بنابراین جواب برابر $\frac{۱۳}{۹۱}=\frac{۱}{۷}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۴

سه کارت رنگی در اختیار داریم که اولی دو رو سبز، دومی دو رو قرمز و سومی یک رو سبز و یک رو قرمز است. یک کارت به تصادف برمی‌داریم و یک رویش را می‌بینیم. اگر رنگ دیده‌شده سبز باشد، با چه احتمالی این کارت دو رو سبز است؟

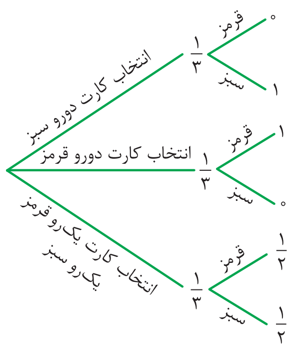
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

کافیه نمودار درختی رسم کنید و از قانون بیز کمک بگیرید.

نکته: قانون بیز در اصل ترکیب **قانون احتمال کل** و **احتمال شرطی** است.



گام اول: نمودار درختی را رسم می‌کنیم:

گام دوم: با توجه به نمودار درختی رسم‌شده، واضح است که احتمال این‌که یک کارت برداریم یک رویش را ببینیم و رنگ آن سبز باشد، برابر است با:

$$\frac{۱}{۳}\times ۱+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

حالا فقط در یک حالت (حالت مشخص‌شده در روی نمودار درختی) این کارت دورو سبز است که احتمال آن $\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}$ است، پس جواب مسئله برابر $\dfrac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۵

اگر A و B دو پیشامد فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A)=۰/۲$ ، $P(B)=۰/۲۲$ و $P(B|A)=۰/۷$ ، آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟

۱) ۰/۹۶   ۲) ۰/۹۰

۳) ۰/۹۲   ۴) ۰/۸۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

الف) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ب) $P(A')=۱-P(A)$

پ) $P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)\,,\,P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)$ ت) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

گام اول: ابتدا به $P(B|A)=۰/۷$ توجه کنید:

$$P(B|A)\overset{\text{الف}}{=}\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\xrightarrow{P(A)=۰/۲}۰/۷=\frac{P(B\cap A)}{۰/۲}\Rightarrow P(B\cap A)=۰/۷\times ۰/۲=۰/۱۴$$

گام دوم: حالا سراغ محاسبهٔ $P(B'|A')$ می‌رویم:

$$P(B'|A') \overset{\text{الف}}{=} \frac{P(B'\cap A')}{P(A')} \overset{\text{ب و پ}}{=\!=} \frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)} \overset{\text{ت}}{=} \frac{1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))}{1-P(A)}$$

پس:

$$= \frac{1-(0/2+0/22-0/14)}{1-0/2} = \frac{0/72}{0/8} = 0/90$$

تست و پاسخ ۲۶

با ارقام ۱،۱،۲،۲،۳،۳،۳،۴،۴،۵ و ۵ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۰۸۰

۲) ۱۴۲۰

۳) ۲۱۰۰

۴) ۲۲۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

می‌دانیم n شیء متمایز $n!$ جایگشت دارند. حالا اگر n شیء داشته باشیم به طوری که k_1 شیء از آن‌ها مثل هم، k_2 شیء دیگر مثل هم، ... و k_n شیء دیگر هم مثل هم باشند، تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

برای مثال تعداد جایگشت‌های حروف AABBBCCCC برابر است با:

$$\frac{9!}{\underbrace{2!}_{\text{A۲تا}}\,\underbrace{3!}_{\text{B۳تا}}\,\underbrace{4!}_{\text{C۴تا}}}$$

نکته: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ حالت می‌توانیم از بین n شیء متمایز، k شیء را انتخاب کنیم به طوری که جایگشت این k شیء مهم نباشد.

پاسخ تشریحی

گام اول: باید حالت‌بندی کنیم:

حالت اول: از هر رقم فقط یکی داشته باشیم، یعنی بخواهیم با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ یک عدد ۵رقمی بنویسیم که $5!=120$ حالت دارد.

حالت دوم: از یکی از ارقام ۲تا و از بقیهٔ ارقام یکی برداریم، یعنی ارقام ما به شکل x، x، y، z و t باشند. ابتدا به $\binom{5}{1}=5$ حالت یکی از ارقام را حذف می‌کنیم، فرض کنید رقم ۵ حذف شد، بعد به $\binom{4}{1}=4$ حالت، انتخاب می‌کنیم از بین کدام‌یک از ۴ رقم باقی‌مانده ۲تا برداریم، مثلاً دو تا رقم ۱ برمی‌داریم. حالا باید با ارقام ۱، ۱، ۲، ۳ و ۴ یک عدد ۵رقمی بنویسیم که $\frac{5!}{2!}=60$ حالت دارد.

حالت سوم: از دوتا از ارقام ۲تا و از یکی از ارقام دیگر یکی برداریم، یعنی ارقام ما به شکل x، x، y، y و z باشند. ابتدا به $\binom{5}{2}=10$ حالت ۲تا از ارقام را حذف می‌کنیم، فرض کنید دو رقم ۴ و ۵ حذف شده‌اند. بعد به $\binom{3}{2}=3$ حالت می‌توانیم انتخاب کنیم از کدام دو رقم ۲تا برداریم، مثلاً از ارقام ۱ و ۲، از هر کدام ۲تا برمی‌داریم. حالا ارقام ما ۱، ۱، ۲، ۲ و ۳ هستند که $\frac{5!}{2!2!}=30$ جایگشت دارند.

گام دوم: بنابراین جواب برابر است با:

$$120+5\times4\times60+10\times3\times30=2220$$

تست و پاسخ ۲۷

با حروف کلمهٔ shokoofeh چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان ساخت که حداکثر شامل یک حرف h باشد؟

۱) ۶۲۰ ۲) ۶۳۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۵۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

گام اول: حروف کلمهٔ shokoofeh را به صورت ooohh sfke می‌نویسیم. می‌خواهیم کلمهٔ ما شامل حداکثر یک حرف h باشد، پس یکی از حرف‌های h را حذف می‌کنیم.

گام دوم: پس حالا باید یک کلمهٔ ۴حرفی با حروف ooohsfke بنویسیم. حالت‌بندی می‌کنیم:

حالت اول: در کلمه ۳تا حرف o باشد. باید به $\binom{5}{1}=5$ حالت یکی از حروف hsfke، مثلاً h را انتخاب کنیم که در این صورت ۴ حرف ما oooh می‌شوند و $\frac{4!}{3!}=4$ جایگشت دارند.

حالت دوم: در کلمه ۲تا حرف o باشد. باید به $\binom{5}{2}=10$ حالت دو حرف از حروف hsfke، مثلاً h و s را انتخاب می‌کنیم که در این صورت ۴ حرف ما oohs می‌شوند و $\frac{4!}{2!}=12$ جایگشت دارند.

حالت سوم: حالا حالت‌هایی را می‌شماریم که در آن‌ها حداکثر یک حرف o باشد ابتدا به $\binom{6}{4}=15$ حالت چهار حرف از حروف ohsfke، مثلاً ohsf را انتخاب می‌کنیم که این ۴ حرف $4!=24$ جایگشت دارند.

گام سوم: بنابراین جواب برابر است با: $5\times4+10\times12+15\times24=20+120+360=500$

تست و پاسخ ۲۸

به چند طریق می‌توان یک عدد هشت‌رقمی نوشت به طوری که متشکل از سه رقم متمایز بوده و تعداد تکرار هر رقم در عدد اصلی، برابر با مقدار آن رقم باشد؟ (یعنی i تا رقم i، j تا رقم j و k تا رقم k داشته باشد.)

۱) ۲۲۴ ۲) ۳۳۶
۳) ۳۷۸ ۴) ۴۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

کافیه به این نکته توجه کنید که باید $i+j+k=8$ باشد.

گام اول: عددی که ما می‌خواهیم باید i رقم i، j رقم j و k رقم k داشته باشد، یعنی مثلاً به شکل زیر باشد:

$$\underbrace{ii\ldots i}_{\text{تا}\,i}\;\underbrace{jj\ldots j}_{\text{تا}\,j}\;\underbrace{kk\ldots k}_{\text{تا}\,k}$$

به علاوه این عدد باید ۸رقمی باشد؛ پس $i+j+k=8$ است.

گام دوم: حالا کافی است جواب‌های طبیعی این معادله را پیدا کنیم:

حالت اول: یکی از جواب‌ها ۱، ۲ و ۵ است، یعنی تعداد اعداد ۸رقمی با یک رقم ۱، دو رقم ۲ و پنج رقم ۵ که تعداد آن‌ها برابر $\frac{8!}{\underbrace{2!}_{\text{دو رقم ۲}}\times\underbrace{5!}_{\text{پنج رقم ۵}}}=168$ تا است.

حالت دوم: جواب دیگر ۱، ۳ و ۴ است، یعنی تعداد اعداد ۸ رقمی با یک رقم ۱، سه رقم ۳ و چهار رقم ۴ که تعداد آن‌ها برابر $\frac{8!}{\underbrace{3!}_{\text{سه رقم ۳}}\times\underbrace{4!}_{\text{چهار رقم ۴}}}=280$ تا است.

حالت دیگری هم نداریم.

گام سوم: بنابراین جواب برابر $168+280=448$ می‌شود.

هندسهٔ (۳): صفحه‌های ۳۳ تا ۵۹، هندسهٔ (۲): صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷

تست و پاسخ ۲۹

معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^۲+۴y-۸x+۱۲=۰$ کدام است؟

۱) $x=-۱$ ۲) $x=۱$ ۳) $x=-۲$ ۴) $x=۲$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره پیدا کردن مختصات رأس و کانون سهمی از روی معادلهٔ آن، مهم‌ترین تیپ مسائل سهمی است.

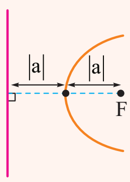
درس‌نامه

۱) در معادلهٔ گستردهٔ سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه‌دوم مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم، یا عرض رأس سهمی پیدا می‌شود یا طولش. احتمالاً می‌پرسید چه‌طور تشخیص دهیم؟

باید خدمتتان عرض کنم که اگر متغیر درجه‌دوم x بود، طول رأس و اگر متغیر درجه‌دوم y بود، عرض رأس پیدا شده است.

۲) مختصات رأس سهمی در معادله‌اش صدق می‌کند.

۳) همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، فاصلهٔ رأس سهمی از کانون و خط هادیِ سهمی یکسان است؛ این فاصله را معمولاً با $|a|$ نشان می‌دهیم.



۴) هر وقت معادلهٔ گستردهٔ یک سهمی را داشتید و a را می‌خواستید، از رابطهٔ روبه‌رو استفاده کنید:

$$\boxed{a=-\frac{\text{ضریب متغیر درجه۱}}{۴\times\text{ضریب متغیر درجه۲}}}$$

حواست به منفی باشه

۵) اگر در سهمی $y^۲$ وجود داشته باشد، سهمی افقی است. در چنین سهمی‌هایی معادلهٔ خط هادی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{x=\text{طول رأس}-a}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ طول رأس)**: در سهمی $y^۲+۴y-۸x+۱۲=۰$، $y^۲$ داریم؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، اگر نسبت به y مشتق بگیریم، عرض سهمی پیدا می‌شود:

$$۲y+۴=۰ \Rightarrow y=-۲$$

حالا $y=-۲$ را در معادله سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا طول رأس هم مشخص شود:

$$(-۲)^۲+۴(-۲)-۸x+۱۲=۰ \Rightarrow -۸x=-۸ \Rightarrow x=۱$$

پس طول رأس شد ۱.

گام دوم (محاسبهٔ a): حالا به کمک مورد (۴) درس‌نامه، مقدار a را در سهمی $\underbrace{۱}_{\text{ضریب متغیر درجه۲}}y^۲+۴y\underbrace{-۸}_{\text{ضریب متغیر درجه۱}}x+۱۲=۰$ به دست می‌آوریم:

$$a=-\frac{\text{ضریب متغیر درجه۱}}{۴\times\text{ضریب متغیر درجه۲}}=-\frac{-۸}{۱\times۴}=۲$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): در معادلهٔ سهمی، $y^۲$ داریم؛ پس طبق مورد (۵) درس‌نامه، می‌توانیم بگوییم این سهمی افقی و در نتیجه معادلهٔ خط هادی آن به این صورت است:

$$x=\text{طول رأس}-a=۱-۲=-۱$$

تست و پاسخ ۳۰

قطر دهانه و فاصلهٔ کانونی یک دیش مخابراتی، هر دو برابر با ۱ متر است. عمق این دیش چند سانتی‌متر است؟

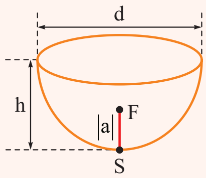
۱) ۲۵ ۲) ۶/۲۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

یکی از تمرین‌های کتاب درسی در مورد دیش‌های سهموی است، ضمن آن‌که از این موضوع سؤال کنکور هم داشته‌ایم.

درس‌نامه

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، دیش‌های مخابراتی، قسمتی از یک سهمی هستند.



در یک دیش با قطر دهانهٔ d، فاصلهٔ کانونی $|a|$ و عمق h، رابطهٔ روبه‌رو برقرار است: $\boxed{d^{۲}=۱۶|a|h}$

به گفتهٔ سؤال $d=|a|=۱m$ است. سؤال عمق دیش، یعنی h را برحسب سانتی‌متر می‌خواهد؛ پس در رابطهٔ $d^{۲}=۱۶|a|h$، d و a را برحسب cm جای‌گذاری می‌کنیم تا h هم برحسب cm به دست بیاید:

$$۱۰۰^{۲}=۱۶(۱۰۰)\times h \Rightarrow h=\frac{۱۰۰^{۲}}{۱۶\times ۱۰۰}=\frac{\overset{۲۵}{\cancel{۱۰۰}}\times\cancel{۱۰۰}}{\underset{۴}{\cancel{۱۶}}\times\cancel{۱۰۰}}=\frac{۲۵}{۴}=۶/۲۵\,cm$$

تست و پاسخ ۳۱

دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ A را واقع بر آن در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ R باشد و از آن بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ C رسم کرد؟

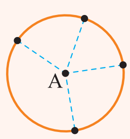
۱) ۱ ‏ ‏ ۲) ۲ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲

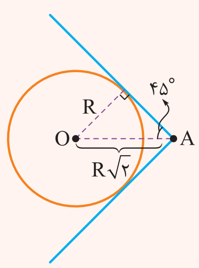
مکان هندسی نقاطی که از آن‌ها بتوان دو مماس عمود بر هم بر یک دایرهٔ ثابت رسم کرد، چیست؟

درس‌نامه

۱) نقطهٔ A را در شکل مقابل ببینید. اگر به دنبال نقطه‌هایی باشیم که فاصله‌شان از این نقطه برابر R باشد، باید دایره‌ای به مرکز A و شعاع R بکشیم. هر نقطه‌ای که روی این دایره باشد، فاصله‌اش از A برابر R است.

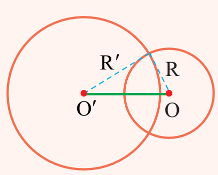


۲) به دایرهٔ $C(O,R)$ در شکل مقابل نگاه کنید. می‌دانیم از هر نقطه‌ای که خارج این دایره باشد، می‌توانیم دو مماس بر آن رسم کنیم. فرض کنید به دنبال نقطه‌هایی باشیم که بتوانیم دو مماس عمود بر هم بر دایره بکشیم. برای پیداکردن این نقاط، باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OA=\sqrt{۲}R$ رسم کنیم. از نقطه‌ای که روی این دایره باشد، می‌توانیم دو مماس عمود بر هم بر $C(O,R)$ بکشیم.



۳) هر وقت به دنبال نقطه‌هایی بودید که هم‌زمان دو ویژگی داشته باشند، نقطه‌های هر ویژگی را جداگانه به دست بیاورید. تا این‌جا باید دوتا شکل کشیده باشید. نقطهٔ (یا نقطه‌های) برخورد این دو شکل جواب (یا جواب‌های) مسئله هستند.

۴) دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ به شرطی مثل شکل زیر، متقاطع می‌شوند که نامساوی زیر برقرار باشد:



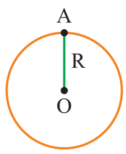
$$|R-R'|<OO'<R+R'$$

گام اول (تشخیص استراتژی حل مسئله): مسئله به دنبال نقطه‌هایی است که هم‌زمان دو ویژگی زیر را داشته باشند:

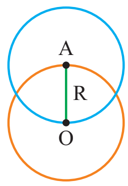
- ویژگی اول: به فاصلهٔ R از A باشند.
- ویژگی دوم: از آن نقاط بتوانیم دو مماس عمود بر هم بر $C(O,R)$ بکشیم.

پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، باید نقطه‌های هر ویژگی را جداگانه پیدا کنیم و نقطه‌های برخوردشان را به عنوان جواب در نظر بگیریم.

گام دوم (پیداکردن نقطه‌های ویژگی اول): به گفتهٔ سؤال نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد (شکل (۱) را ببینید). به دنبال نقطه‌هایی هستیم که به فاصلهٔ R از A هستند؛ پس دایره‌ای به مرکز A و شعاع R می‌کشیم. این دایره را به شکل (۱) اضافه می‌کنیم تا به شکل (۲) برسیم. همان‌طور که در شکل (۲) می‌بینید این دایره از مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ می‌گذرد:

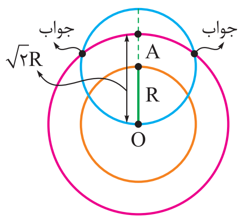


شکل (۱)



شکل (۲)

گام سوم (پیداکردن نقطه‌های ویژگی دوم و جواب‌های مسئله): طبق مورد (۲) درس‌نامه، برای پیداکردن نقطه‌های ویژگی دوم، باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{2}R$ بکشیم. این دایره را به شکل (۲) اضافه می‌کنیم تا به شکل (۳) برسیم. در شکل(۳) دایره‌های آبی و قرمز متقاطع‌اند، در این صورت مسئله جواب دارد، اما باید مطمئن بشویم که دایره‌ها متقاطع‌اند.



شکل (۳)

برای این کار باید ببینیم نامساوی‌ای که در مورد (۴) درس‌نامه گفتیم، برقرار است یا نه:

$$|\underbrace{\sqrt{2}R}_{1/4R}-R|<\underbrace{OA}_{R}<\underbrace{\sqrt{2}R}_{1/4R}+R \Rightarrow 0/4R<R<2/4R \quad \checkmark$$

پس با اطمینان می‌توانیم بگوییم دو دایره متقاطع‌اند و مسئله دو جواب دارد.

تست و پاسخ ۳۲

دایره‌ای به شعاع ۵ و مماس بر محور xها که از نقطهٔ (۳,۲) گذشته و محور yها را قطع <u>نمی‌کند</u>، از کدام نقطه می‌گذرد؟

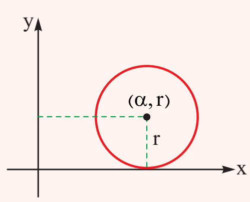
۱) (۷,۲) ۲) (۵,۶)

۳) (۴,۹) ۴) (۶,۱)

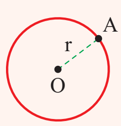
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

۱) اگر یک دایره به شعاع r، مثل شکل مقابل، در ناحیهٔ اول بر محور xها مماس باشد، می‌توانیم مختصات مرکزش را به صورت $O(\alpha,r)$ در نظر بگیریم.

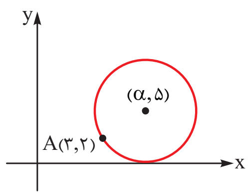


۲) اگر نقطه‌ای روی دایره باشد، فاصله‌اش از مرکز دایره، مساوی شعاع دایره است؛ مثلاً در شکل مقابل، $OA=r$ می‌شود.



۳) معادلهٔ دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$$



گام اول (رسم شکل فرضی و پیداکردن فرم مرکز): سؤال از دایره‌ای به شعاع ۵ حرف می‌زند که از نقطهٔ $A(۳,۲)$ می‌گذرد، و بر محور xها مماس است و محور yها را قطع نمی‌کند. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، این اتفاق فقط در ناحیهٔ اول امکان‌پذیر است. حالا طبق مورد (۱) درس‌نامه، می‌توانیم مختصات مرکز را به صورت $O(\alpha,\overset{r}{۵})$ در نظر بگیریم.

گام دوم (نوشتن معادلهٔ دایره): به گفتهٔ سؤال نقطهٔ $A(۳,۲)$ روی دایره قرار دارد؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$OA=r \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=۵ \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۳)^۲+۹}=۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\alpha-۳)^۲+۹=۲۵$$

$$\Rightarrow (\alpha-۳)^۲=۱۶ \Rightarrow \begin{cases}\alpha-۳=۴ \Rightarrow \alpha=۷ & \checkmark\\ \alpha-۳=-۴ \Rightarrow \alpha=-۱ & \times\end{cases}$$

طول مرکز (α) در ناحیهٔ اول نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $\alpha=۷$ قابل قبول است. حالا که مرکز و شعاع دایره را داریم، می‌توانیم به کمک مورد (۳) درس‌نامه معادله‌اش را بنویسیم:

$$\begin{cases}O(۷,۵)\\ r=۵\end{cases} \Rightarrow \text{معادلهٔ دایره}: (x-۷)^۲+(y-۵)^۲=۵^۲$$

گام سوم (پیداکردن گزینهٔ درست): دایره از نقطه‌ای می‌گذرد که در معادله‌اش صدق کند. تنها نقطه‌ای که در $(x-۷)^۲+(y-۵)^۲=۵^۲$ صدق می‌کند، نقطهٔ $(۴,۹)$ در ۳ است؛ پس همین گزینه درست است.

تست و پاسخ ۳۳

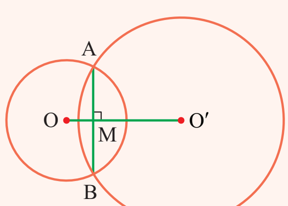
دو دایره با شعاع‌های برابر در نقاط $(۲,۰)$ و $(۶,۴)$ متقاطع‌اند. اگر طول خط‌المرکزین، نصف طول وترمشترک دو دایره باشد، فاصلهٔ بین نقاط برخورد یکی از دایره‌ها با محور xها کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره شاید فکر کنید که این سؤال خیلی زمان‌بر است و نباید در آزمون مطرح می‌شد، اما در کنکور سال گذشته، سؤالی مشابه این سؤال مطرح شده است.

درس‌نامه



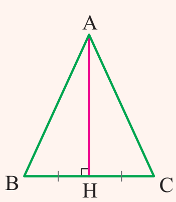
۱) دو دایره متقاطع با خط‌المرکزین OO' و وترمشترک AB را در شکل مقابل ببینید.

در چنین وضعیتی همیشه خط‌المرکزین (OO') عمودمنصف وترمشترک (AB) است. این یعنی در شکل بالا $OO'\perp AB$ و M وسط AB است.

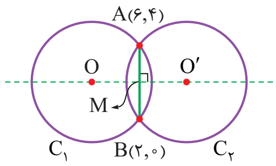
۲) معادلهٔ دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r به این صورت است: $\boxed{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲}$

۳) هر وقت خواستید محل برخورد یک منحنی مثل f را با محور xها پیدا کنید، در معادلهٔ منحنی f، y را صفر بگذارید و معادلهٔ حاصل را حل کنید. برای پیداکردن محل برخورد f با محور yها هم باید x را صفر بگذارید.

۴) اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیبشان قرینه و معکوس هم است.

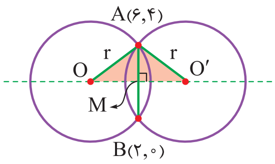


۵) در هر مثلث متساوی‌الساقین مثل ABC در شکل مقابل، ارتفاع وارد بر قاعده (ارتفاع AH) نیمساز و میانه هم هست، یعنی در شکل مقابل $BH=HC$ است.



گام اول (رسم شکل فرضی و تحلیل آن): شکل فرضی مقابل را می‌کشیم:

طبق مورد (۱) درس‌نامه دو چیز می‌توانیم بگوییم؛ اول این‌که خط‌المرکزین OO' بر وترمشترک AB عمود و دوم این‌که M، وسط AB است.



گام دوم (محاسبهٔ شعاع دایره‌ها): به گفتهٔ سؤال، طول خط‌المرکزین OO' نصف طول وترمشترک AB است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$OO' = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۶-۲)^۲ + (۴-۰)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲} = ۲\sqrt{۲}$$

در ادامه، خوب به مثلث متساوی‌الساقین رنگی نگاه کنید. طبق مورد (۵) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم در این مثلث ارتفاع AM، میانه هم هست، یعنی:

$$MO = MO' = \frac{OO'}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

از طرفی M هم وسط AB است، پس:

$$MA = \frac{\overbrace{AB}^{\text{قبلاً شد } ۴\sqrt{۲}}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

حالا که طول MA و MO را داریم می‌توانیم به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM، r را به دست بیاوریم:

$$r^۲ = MA^۲ + MO^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = ۱۰ \Rightarrow r = \sqrt{۱۰}$$

گام سوم (پیداکردن مختصات پارامتری O): طبق شکل گام دوم، O روی خط‌المرکزین دو دایره قرار دارد، پس برای پیداکردن مختصات پارامتری آن باید اول معادلهٔ OO' را بنویسیم. OO' بر AB عمود است، بنابراین شیبش قرینه و معکوس شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۴-۰}{۶-۲} = ۱ \xrightarrow{m_{OO'} = -\frac{۱}{m_{AB}}} m_{AB} = -۱$$

از طرفی OO' از M که وسط AB قرار دارد هم می‌گذرد، پس مختصات نقطهٔ M را هم به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{A+B}{۲} = \frac{(۶,۴)+(۲,۰)}{۲} = \frac{(۸,۴)}{۲} = (۴,۲)$$

حالا می‌توانیم بگوییم OO' از نقطهٔ $M(۴,۲)$ می‌گذرد و شیبش -۱ است، پس طبق مورد (۶) درس‌نامه، معادله‌اش به این صورت نوشته می‌شود:

$$y - ۲ = -۱(x - ۴) \Rightarrow y = -x + ۶$$

O روی خط $y = -x + ۶$ قرار دارد، بنابراین مختصات پارامتری آن به صورت $O(\alpha, -\alpha + ۶)$ می‌شود.

گام چهارم (پیداکردن مرکز دایره‌ها): فاصلهٔ نقطهٔ $O(\alpha, -\alpha + ۶)$ از $B(۲,۰)$ را مساوی $r = \sqrt{۱۰}$ می‌گذاریم تا α پیدا شود:

$$OB = r \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۲)^۲ + (\underbrace{(-\alpha + ۶) - ۰}_{-\alpha+۶})^۲} = \sqrt{۱۰} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\alpha - ۲)^۲ + (-\alpha + ۶)^۲ = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۴۰ = ۱۰ \Rightarrow ۲\alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۳۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} \alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (\alpha - ۳)(\alpha - ۵) = ۰ \Rightarrow \alpha = ۳, ۵$$

اگر دو مقدار به‌دست‌آمده برای α را در $O(\alpha, -\alpha + ۶)$ جای‌گذاری کنیم، مختصات O و O' به این صورت می‌شود: $O(۳,۳)$, $O'(۵,۱)$

گام پنجم (نوشتن معادلهٔ دایره‌ها): حالا که مراکز و شعاع دایره‌ها را داریم، می‌توانیم به کمک مورد (۲) درس‌نامه معادله‌هایشان را بنویسیم:

$$C_۱: (x-۳)^۲ + (y-۳)^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۰$$

$$C_۲: (x-۵)^۲ + (y-۱)^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow (x-۵)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۰$$

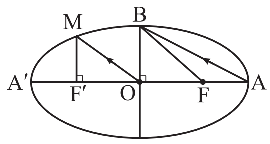
گام ششم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طبق مورد (۳) درس‌نامه برای به دست آوردن نقطه یا نقطه‌های برخورد دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ با محور xها، $y = ۰$ در معادله‌های آن‌ها جای‌گذاری می‌کنیم:

$$C_۱: y = ۰ \Rightarrow (x-۳)^۲ + \underbrace{(۰-۳)^۲}_{۹} = ۱۰ \Rightarrow (x-۳)^۲ = ۱ \Rightarrow x - ۳ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۱ \Rightarrow x = ۴ \\ x - ۳ = -۱ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

همین‌جا معلوم می‌شود که فاصلهٔ بین نقاط برخورد دایرهٔ C با محور xها برابر $۴ - ۲ = ۲$ است؛ پس دیگر نیازی به جای‌گذاری $y = ۰$ در معادلهٔ دایرهٔ $C_۲$ نداریم.

تست و پاسخ ۳۴

در بیضی رسم‌شده به کانون‌های F و F'، اگر AB با OM موازی باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{OM}{AA'}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

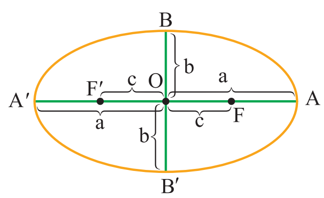
۳) $2\sqrt{3}-3$ ۴) $\sqrt{2}-1$

پاسخ: گزینهٔ ۱

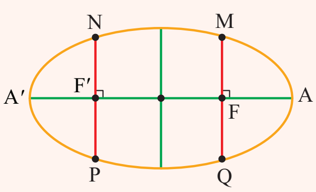
مشاوره «طول وتر کانونی بیضی» که در حل این سؤال از آن استفاده کرده‌ایم، در یکی از کار در کلاس‌های کتاب درسی مطرح شده و مهم است، پس فکر نکنید که این موضوع در کتاب درسی وجود نداره و مهم نیست.

درس‌نامه

۱) فاصله‌های مهم بیضی را در جدول زیر ببینید:

فاصله‌های مهم	شکل
قطر بزرگ: $AA'=2a$	
قطر کوچک: $BB'=2b$	
فاصلهٔ کانونی: $FF'=2c$	
مرکز بیضی: $O=\frac{F+F'}{2}$	

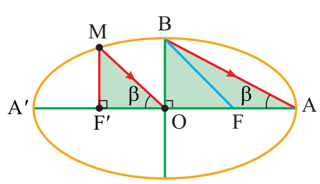
۲) در شکل مقابل از کانون‌های بیضی (F,F') عمودهایی بر قطر بزرگ (AA') کشیده‌ایم تا بیضی را در چهار نقطه قطع کنند.



در چنین شرایطی طول هر ۴ پاره‌خط MF, FQ, NF' و PF' برابر می‌شود با: $\boxed{MF=\frac{b^2}{a}}$

۳) بین پارامترهای بیضی (a، b و c) این رابطه برقرار است: $\boxed{a^2=b^2+c^2}$

پاسخ تشریحی **گام اول (پیداکردن رابطهٔ بین پارامترهای بیضی):** خوب به پاره‌خط‌های موازی AB و MO و پاره‌خط مورب AA' در شکل نگاه کنید. طبق قضیهٔ «خطوط موازی و مورب» می‌توانیم بگوییم زاویه‌های A و MOF' برابرند؛ این زاویه‌ها را با β در شکل نشان می‌دهیم.



حالا بیایید در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ رنگی $\tan\beta$ را بنویسیم:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{MOF'}: \tan\beta=\frac{MF'}{OF'} \\ \overset{\triangle}{AOB}: \tan\beta=\frac{OB}{OA} \end{cases} \xrightarrow[\text{هم باید برابر باشد}]{\text{سمت چپ برابره پس سمت راست}} \frac{MF'}{OF'}=\frac{OB}{OA} \quad (*)$$

طبق مورد (۱) درس‌نامه، $OB=b$, $OA=a$ و $OF'=c$ است. MF' هم دقیقاً شرایط مورد (۲) درس‌نامه را دارد؛ پس $MF'=\frac{b^2}{a}$.

با جای‌گذاری این موارد در رابطهٔ (*) داریم:

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{c}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2}{\cancel{a}}\times \overset{1}{\cancel{a}}=bc \Rightarrow b^2=bc \xrightarrow[b\neq 0]{\div b} b=c \quad (1)$$

حالا طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$a^2=b^2+c^2 \xrightarrow{b=c} a^2=c^2+c^2 \Rightarrow a^2=2c^2 \Rightarrow a=\sqrt{2}c \quad (2)$$

گام دوم (محاسبهٔ طول OM برحسب c): در ادامه به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MOF'، طول OM را برحسب a حساب می‌کنیم:

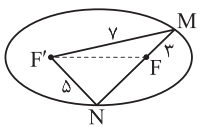
$$OM^2=OF'^2+MF'^2 \Rightarrow OM^2=c^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 \xrightarrow{(1),(2)} OM^2=c^2+\left(\frac{c^{\cancel{2}}}{\sqrt{2}\,\cancel{c}}\right)^2=c^2+\frac{c^2}{2}=\frac{3}{2}c^2$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): در آخر خواستهٔ سؤال، یعنی مقدار $\frac{OM}{AA'}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{OM}{AA'}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}c}{2a}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,c}{2(\sqrt{2}\,c)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

تست و پاسخ ۳۵

خروج از مرکز بیضی رسم‌شده که در آن MN از کانون F می‌گذرد، کدام است؟

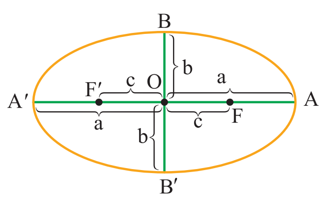


۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

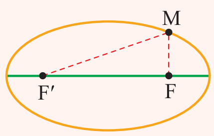
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) فاصله‌های مهم بیضی را در جدول زیر ببینید:

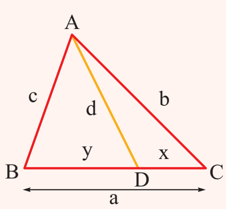
فاصله‌های مهم	شکل
قطر بزرگ: $AA'=2a$	
قطر کوچک: $BB'=2b$	
فاصلهٔ کانونی: $FF'=2c$	
مرکز بیضی: $O=\frac{F+F'}{2}$	

۲) هر نقطه‌ای که روی بیضی باشد، مجموع فواصلش از کانون‌های بیضی برابر ۲a است؛ این یعنی برای نقطهٔ M در شکل مقابل، رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\boxed{MF+MF'=2a}$$

۳) مثلث ABC با اضلاع a، b و c را در شکل مقابل ببینید.



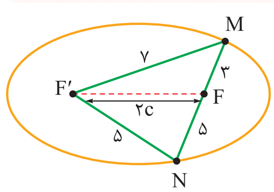
همان‌طور که می‌بینید، پاره‌خط $AD=d$ روی ضلع مقابلش $(BC=a)$، دو پاره‌خط به طول x و y ایجاد کرده است. در چنین شرایطی طبق قضیهٔ استوارت، رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$\boxed{c^2x+b^2y=a(d^2+xy)}$$

۴) خروج از مرکز هر بیضی برابر است با:

$$\boxed{e=\frac{c}{a}}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ طول پاره‌خط NF)**: همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، نقطه‌های M و N روی بیضی قرار دارند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:



$$\begin{cases} MF+MF'=2a \Rightarrow 3+7=2a \Rightarrow a=5 \\ NF+NF'=2a \xrightarrow{a=5} NF+5=2(5) \Rightarrow NF=10-5=5 \end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم طول FF' را با $۲c$ روی شکل نشان بدهیم. حالا خوب به مثلث $MF'N$ نگاه کنید. در این مثلث رابطهٔ استوارت را می‌نویسیم تا مقدار c پیدا شود:

$$MF'^{۲}\times NF + NF'^{۲}\times MF = MN(FF'^{۲} + MF\times NF) \Rightarrow (\underbrace{۷^{۲}\times ۵}_{۲۴۵}) + (\underbrace{۵^{۲}\times ۳}_{۷۵}) = ۸((۲c)^{۲} + (۳\times ۵))$$

$$\Rightarrow ۳۲۰ = ۸(۴c^{۲} + ۱۵) \xrightarrow{\div ۸} ۴۰ = ۴c^{۲} + ۱۵ \Rightarrow ۲۵ = ۴c^{۲} \Rightarrow c^{۲} = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حالا که a و c را داریم، می‌توانیم به کمک مورد (۴) درس‌نامه، خروج از مرکز بیضی را حساب کنیم:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{۵}{۲}}{۵} = \frac{۱}{۲}$$

تست و پاسخ ۳۶

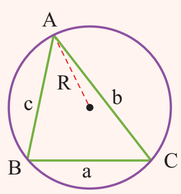
اندازهٔ یک ضلع مثلثی $۴\sqrt{۲}$ و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به آن ۳۰° است. اگر اندازهٔ یک زاویهٔ دیگر مثلث ۱۵° باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

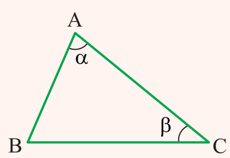
از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده کنید.

درس‌نامه



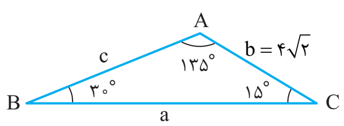
۱) طبق قضیهٔ سینوس‌ها، برای مثلث مقابل، می‌توانیم رابطهٔ زیر را بنویسیم:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = ۲R}$$



۲) در هر مثلث، ضلعی که رو به زاویهٔ بزرگ‌تر قرار دارد، بزرگ‌تر از ضلعی است که رو به زاویهٔ کوچک‌تر است؛ این یعنی اگر در شکل مقابل $\alpha > \beta$ باشد، می‌توانیم بگوییم $\underbrace{BC}_{\text{رو به } \alpha} > \underbrace{AB}_{\text{رو به } \beta}$ است.

گام اول (رسم شکل و تحلیل سؤال): شکل مسئله به صورت مقابل است.



می‌دانیم مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است، پس $\hat{A} = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۱۵^\circ) = ۱۳۵^\circ$. سؤال طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث را می‌خواهد. همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، $\hat{A} = ۱۳۵^\circ$، بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم، ضلع رو به این زاویه، یعنی a بزرگ‌ترین ضلع مثلث است؛ بنابراین ما باید مقدار a را به دست بیاوریم.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حالا به کمک قضیهٔ سینوس‌ها، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin ۱۳۵^\circ} = \frac{۴\sqrt{۲}}{\underbrace{\sin ۳۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}}} \xrightarrow{\sin ۱۳۵^\circ = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}} \frac{a}{\frac{\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{\frac{۱}{\cancel{۲}}} \Rightarrow a = ۴\sqrt{۲}\times\sqrt{۲} = ۴\times ۲ = ۸$$

تست و پاسخ ۳۷

مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی به طول اضلاع a، ۱۲ و ۵ بیرون آن واقع است. چند مقدار طبیعی برای a قابل قبول است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

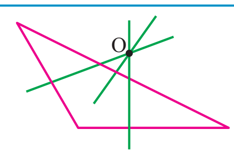
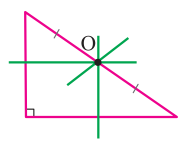
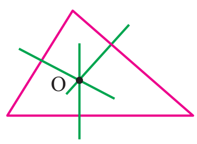
مثلث مورد نظر سؤال، دارای زاویهٔ منفرجه است.

درس‌نامه...

۱) هر وقت می‌خواستید به کمک طول اضلاع یک مثلث، نوع آن را مشخص کنید، از جدول زیر استفاده کنید:

مثلث حاده	مثلث قائم‌الزاویه	مثلث منفرجه
جمع مربعات دو ضلع دیگر > مربع بزرگ‌ترین ضلع	جمع مربعات دو ضلع دیگر = مربع بزرگ‌ترین ضلع	جمع مربعات دو ضلع دیگر < مربع بزرگ‌ترین ضلع

۲) عمودمنصف‌های هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند که این نقطه همان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. همان‌طور که در جدول زیر می‌بینید، این نقطهٔ همرسی می‌تواند داخل، خارج و یا حتی روی مثلث باشد.

نوع مثلث	منفرجه	قائم‌الزاویه	حاده
شکل			
نقطهٔ همرسی کجاست؟	خارج مثلث	روی مثلث (وسط وتر)	داخل مثلث

۳) برای مثلث با اضلاع a، b و c می‌توانیم نامساوی‌های زیر را بنویسیم:

$$\boxed{|a-b|<c<a+b}\,,\,\boxed{|a-c|<b<a+c}\,,\,\boxed{|b-c|<a<b+c}$$

گام اول (تشخیص نوع مثلث): به گفتهٔ سؤال مرکز دایرهٔ محیطی (نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها) بیرون مثلث قرار دارد، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم مثلث منفرجه است.

گام دوم (اجرای شرط مثلث‌بودن): طبق مورد (۳) درس‌نامه، اعداد ۱۲ ,a و ۵ به شرطی می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند که:

$$|5-12|<a<|5+12| \Rightarrow 7<a<17 \quad (1)$$

گام سوم (پیداکردن خواستهٔ سؤال): در گام اول دیدیم که مثلث منفرجه شد، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه باید نامساوی «جمع مربعات دو ضلع دیگر < مربع بزرگ‌ترین ضلع» برقرار باشد. این‌جا طول یکی از اضلاع مجهول است، پس بزرگ‌ترین ضلع هم می‌تواند a باشد، هم ۵ و هم ۱۲:

- a بزرگ‌ترین ضلع باشد:

$$a^2>5^2+12^2 \Rightarrow a^2>169 \xrightarrow{\text{a مثبت است.}} a>13 \xrightarrow[\text{اشتراک}]{7<a<17} 13<a<17 \xrightarrow{\text{a طبیعی است.}} a=14,15,16$$

- ۵ بزرگ‌ترین ضلع باشد که این حالت امکان‌پذیر نیست چون خود سؤال گفته طول ضلع دیگر مثلث ۱۲ است!
- ۱۲ بزرگ‌ترین ضلع باشد:

$$12^2>a^2+5^2 \Rightarrow a^2<119 \Rightarrow a<10/\ldots \xrightarrow[\text{اشتراک}]{7<a<17} 7<a<10/\ldots \xrightarrow{\text{a طبیعی است.}} a=8,9,10$$

همان‌طور که می‌بینید، جمعاً ۶ مقدار طبیعی برای a پیدا شد.

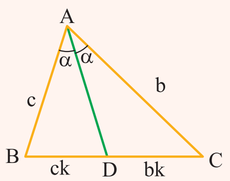
تست و پاسخ ۳۸

چهارضلعی ABCD در دایره‌ای به قطر AD محاط شده است. اگر BC = CD و نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی روی قطر BD پاره‌خط‌هایی به طول ۳ و ۵ ایجاد کند، طول BC کدام است؟

۱) ۴ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{6}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

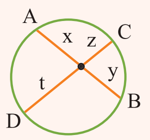
درس‌نامه



۱) نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را متناسب با اضلاع کناری‌اش قطع می‌کند؛ این یعنی اگر در شکل مقابل، AD نیمساز باشد، می‌توانیم تناسب مقابل را بنویسیم:

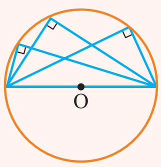
کنار هم
$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$$
کنار هم

این تناسب را می‌توانیم به صورت $BD=cK \ , \ DC=bK$ هم روی شکل بنویسیم.

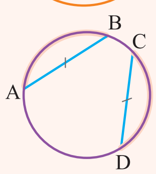


۲) هر وقت دو وتر مثل شکل مقابل، داخل دایره همدیگر را قطع کنند $(AB \text{ و } CD)$، بین قطعاتی که روی همدیگر می‌سازند (t,z,y,x) این رابطه برقرار است:

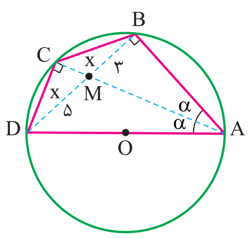
$$\boxed{xy=zt}$$



۳) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، زاویهٔ محاطی رو به قطر همیشه ۹۰° است:

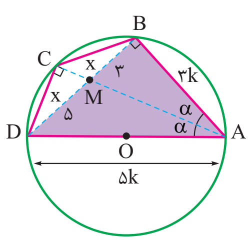


۴) در شکل مقابل اگر $AB=CD$ باشد، می‌توانیم بگوییم $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ است و برعکس.



گام اول (رسم شکل مسئله و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت مقابل است.

به گفتهٔ سؤال طول اضلاع BC و DC برابرند؛ طول جفتشان را با x روی شکل نشان می‌دهیم. از تساوی $DC=BC$ طبق مورد (۴) درس‌نامه، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$؛ این یعنی زاویه‌های محاطی BAC و DAC که روبه‌روی این دو کمان هستند هم برابرند. این دو زاویه را هم با α روی شکل نشان می‌دهیم. حالا خوب به زاویه‌های B و C در شکل نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید، این دو زاویه، محاطی و رو به قطر هستند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه هر دو ۹۰°اند.



گام دوم (محاسبهٔ طول اضلاع AB و BD): در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، AM نیمساز است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، می‌توانیم تناسب $\frac{AB}{AD}=\frac{۳}{۵}$ را به صورت $AB=۳k$ و $AD=۵k$ روی شکل بنویسیم.

حالا در همین مثلث، فیثاغورس می‌نویسیم:

$$AD^۲=AB^۲+BD^۲ \Rightarrow (۵k)^۲=(۳k)^۲+۸^۲ \Rightarrow ۲۵k^۲=۹k^۲+۶۴ \Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۱۶}}\,k^۲=\overset{۴}{\cancel{۶۴}} \Rightarrow k^۲=۴ \Rightarrow k=۲$$

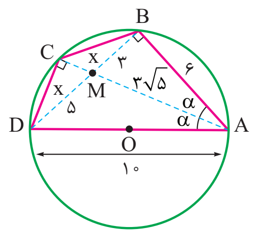
پس طول اضلاع AB و AD می‌شود:

$$\begin{cases} AB=۳k=۳\times ۲=۶ \\ AD=۵k=۵\times ۲=۱۰ \end{cases}$$

گام سوم (محاسبهٔ طول نیمساز AM): به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، طول AM را به دست می‌آوریم:

$$AM^۲=\sqrt{۶^۲+۳^۲}=\sqrt{۴۵} \Rightarrow AM=۳\sqrt{۵}$$

گام چهارم (محاسبهٔ طول MC): چیزهایی که تا این‌جا به دست آوردیم را به شکل گام دوم اضافه می‌کنیم تا به شکل مقابل برسیم.



همان‌طور که می‌بینید، وترهای AC و BD همدیگر را داخل دایره قطع کرده‌اند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، داریم:

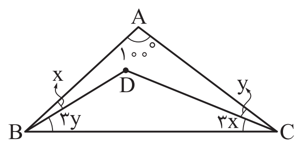
$$MA \times MC = MB \times MD \Rightarrow \cancel{۳}\sqrt{۵} \times MC = \cancel{۳} \times ۵ \Rightarrow MC = \frac{۵}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

گام پنجم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حالا خوب به مثلث قائم‌الزاویهٔ MCD نگاه کنید. طول اضلاع $MD = ۵$ و $MC = \underbrace{AM}_{۳\sqrt{۵}} + \underbrace{MC}_{\sqrt{۵}} = ۴\sqrt{۵}$ را داریم و $CD = x$ را می‌خواهیم، پس کافی است فیثاغورس بنویسیم:

$$CD = \sqrt{۵^۲ - (\sqrt{۵})^۲} = \sqrt{۲۰} \Rightarrow x = ۲\sqrt{۵}$$

تست و پاسخ ۳۹

در شکل رسم‌شده، اگر $CD = ۸$ و $BD = ۶$، آن‌گاه مساحت مثلث BCD کدام است؟

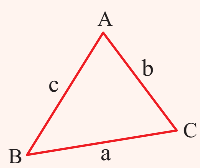


۱) $۶\sqrt{۳}$
۲) $۱۲\sqrt{۳}$
۳) ۱۸
۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

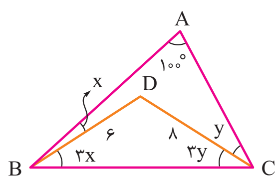
درس‌نامه

مساحت هر مثلث را می‌توانیم به کمک رابطهٔ «سینوس زاویهٔ بین همان دو ضلع × حاصل‌ضرب دو ضلع × $\frac{۱}{۲}$» به دست بیاوریم. مثلاً برای مساحت مثلث مقابل می‌توانیم رابطه‌های زیر را بنویسیم:



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}ab.\sin\hat{C} \text{ یا } \frac{۱}{۲}ac.\sin\hat{B} \text{ یا } \frac{۱}{۲}bc.\sin\hat{A}$$

گام اول (تشخیص استراتژی حل): سؤال به دنبال مساحت مثلث BDC است. از این مثلث دو ضلع BD و DC را داریم، پس اگر بتوانیم زاویهٔ بین این دو ضلع، یعنی $\hat{D}$ را به دست بیاوریم، می‌توانیم طبق درس‌نامه به کمک رابطهٔ «$S_{BDC} = \frac{۱}{۲}BD \times DC \times \sin\hat{D}$» خواستهٔ سؤال را حساب کنیم.



در مثلث BDC، زاویهٔ D برابر است با: $\hat{D} = ۱۸۰° - (۳x + ۳y) = ۱۸۰° - ۳(x + y) \quad (*)$

پس برای محاسبهٔ D باید «$x + y$» را پیدا کنیم.

گام دوم (محاسبهٔ $x + y$ و خواستهٔ سؤال): مجموع زوایای داخلی مثلث ABC را مساوی $۱۸۰°$ می‌گذاریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰° \Rightarrow ۱۰۰° + ۴x + ۴y = ۱۸۰° \Rightarrow ۴(x + y) = ۸۰° \Rightarrow x + y = ۲۰°$$

حالا تساوی بالا را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

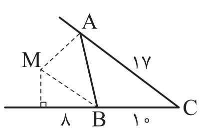
$$\hat{D} = ۱۸۰° - ۳(۲۰°) = ۱۲۰°$$

حالا که $\hat{D}$، BD و DC را داریم، می‌توانیم مثلث BDC را حساب کنیم:

$$S_{BDC} = \frac{۱}{۲}BD \times DC \times \sin\hat{D} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ \times \sin ۱۲۰° \xrightarrow{\sin ۱۲۰° = \sin ۶۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} S_{BDC} = ۲۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

تست و پاسخ ۴۰

در شکل رسم‌شده، اگر M محل تقاطع نیمسازهای خارجی A و B باشد، آن‌گاه مساحت ABC کدام است؟



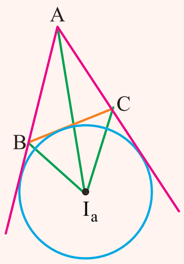
۱) ۶۴
۲) ۵۴
۳) ۳۶
۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

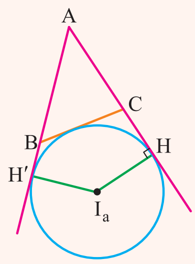
مشاوره سؤالی ترکیبی از «دایره‌های محاطی خارجی مثلث» و «رابطهٔ هرون برای محاسبهٔ مساحت مثلث» که با ایده‌گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور پارسال طرح شده است.

M مرکز یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC است.

درس‌نامه



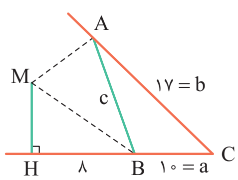
۱) هر مثلث، سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است. در شکل مقابل یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را رسم کرده‌ایم. مرکز این دایره، محل برخورد نیمساز داخلی $\hat{A}$ و نیمسازهای خارجی زوایای B و C است.



۲) دایرهٔ محاطی خارجی مثلث مقابل را ببینید.

اگر شعاع‌های عمود بر مماس این دایره، یعنی پاره‌خط‌های I_aH و I_aH' را بکشیم، طول پاره‌خط‌های AH و AH′ هر دو برابر با نصف محیط مثلث ABC می‌شوند، یعنی: $\boxed{AH = AH' = P\,(\text{نصف محیط مثلث } ABC)}$

۳) (قضیهٔ هرون) اگر P، نصف محیط مثلثی با اضلاع a، b و c باشد، در این صورت مساحتش برابر می‌شود با: $\boxed{S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$



پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل نقطهٔ M در شکل)**: به گفتهٔ سؤال، نقطهٔ M در شکل مقابل، محل برخورد نیمسازهای خارجی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم این نقطه، مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC است.

گام دوم (محاسبهٔ P و AB): M مرکز دایرهٔ محاطی خارجی شد، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، اگر از M بر امتداد BC عمود کنیم، طول پاره‌خط HC برابر می‌شود با نصف محیط مثلث ABC که با P نشانش می‌دهیم: $HC = P \Rightarrow ۸ + ۱۰ = P \Rightarrow P = ۱۸$

حالا که می‌دانیم $P = ۱۸$ است، می‌توانیم بنویسیم: $P = \frac{c+b+a}{۲} \Rightarrow ۱۸ = \frac{c+۱۰+۱۷}{۲} \Rightarrow ۳۶ = c + ۲۷ \Rightarrow c = ۹$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): از مثلث ABC، طول تمام اضلاعش را داریم، پس می‌توانیم به کمک قضیهٔ هرون مساحتش را حساب کنیم:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۸(۱۸-۱۰)(۱۸-۱۷)(۱۸-۹)} = \sqrt{\underbrace{۱۸}_{۹\times۲} \times ۸ \times ۱ \times ۹} = \sqrt{۹ \times ۱۶ \times ۱ \times ۹} = ۳ \times ۴ \times ۳ = ۳۶$$