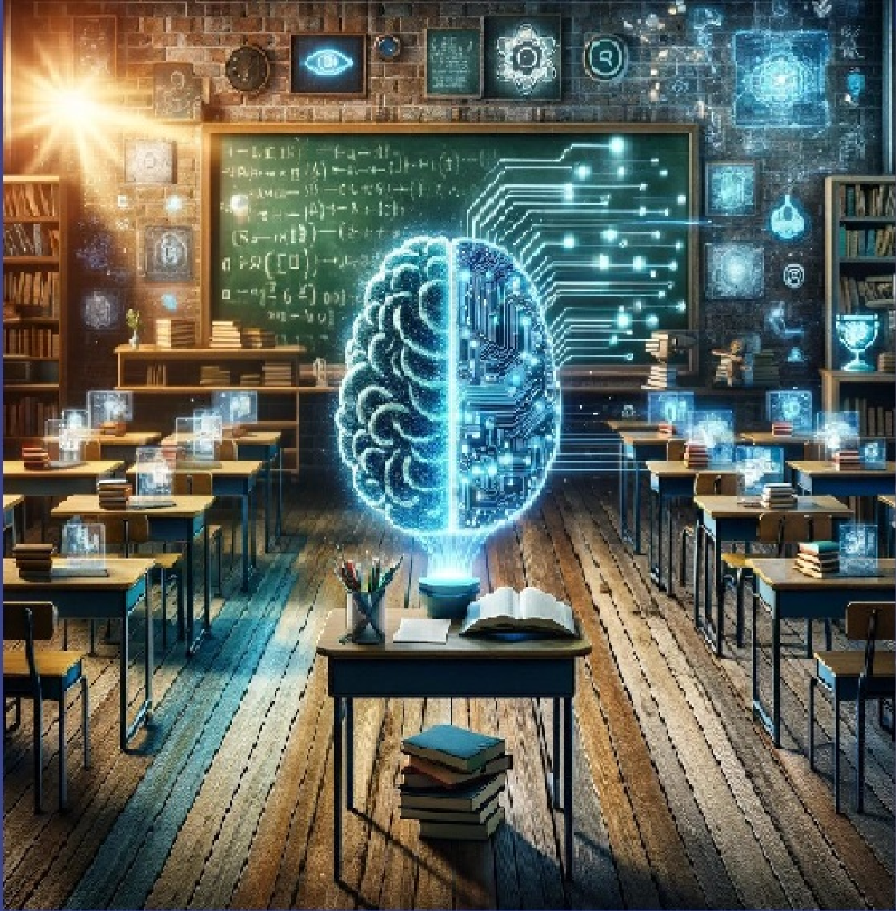
مجتمع آموزشی ملت



حسابان

رشته ریاضی

- درسنامه های جامع همراه با نکات طلایی
- تست های طبقه بندی شده برای هر درس به همراه پاسخ نامه
- سوالات امتحان نهایی
- تست های کنکور سال های گذشته

سالار عموزاده

حسابان ۲: مشتق: صفحه‌های ۷۱ تا ۸۳ — وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

پاسخ دادن به این سؤالات برای همهٔ دانش‌آموزان اجباری است.

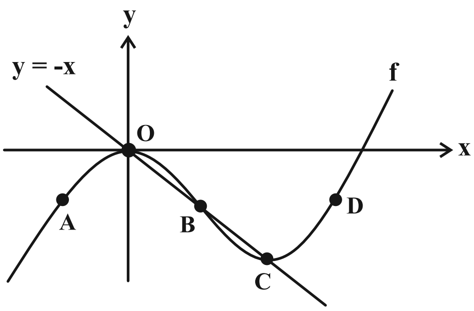
۱- اگر $f(x)=[\frac{3}{2}x]x-1$ باشد، $f'(-3)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -4 ۲) -5 ۳) -3 ۴) مشتق ندارد.

۲- مشتق تابع $f(x)=|(x-1)^{\frac{4}{3}}|$ در $x=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ندارد.

۳- نمودار تابع f و خط $y=-x$ در شکل زیر رسم شده است. تابع $g(x)=\sqrt{x+\frac{x}{f'(x)}}$ در چند نقطه از نقاط مشخص‌شده روی نمودار تابع f تعریف می‌شود؟

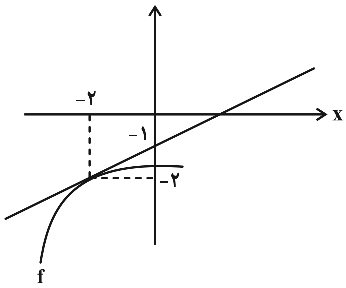


۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴- اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۵- در شکل زیر، نمودار تابع f و خط مماس بر آن در $x=-2$ رسم شده است. مشتق تابع $g(x)=(x+2)f(x)$ در $x=-2$ کدام است؟



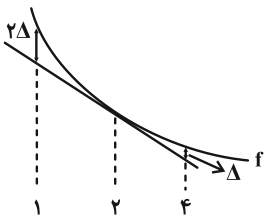
۱) -2
۲) ۱
۳) $\frac{1}{2}$
۴) -1

محل انجام محاسبات

۶- خط $y=3x-1$ در $x=-\frac{1}{2}$ بر نمودار تابع $f(x)=ax^2-3ax+b$ مماس است. عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع f در $x=\frac{7}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۱۳

۷- در شکل زیر، نمودارتابع f و خط مماس بر آن در $x=2$ رسم شده است. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-5}{h}=-6$ و $f(4)=0$ باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟ آزمون وی ای پی



۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۱

۴) ۱۲

۸- توابع $f(x)=x\log_2 x^2$ و $g(x)=\log_4 x$ مفروض اند. کدام خط در $x=\frac{1}{4}$ بر نمودار تابع $f-g$ مماس است؟

۱) $8x+y-2=0$ ۲) $4x+2y-1=0$

۳) $8x-y-2=0$ ۴) $4x+y-1=0$

۹- اگر $f(\frac{\pi}{4})=1$ و $f'(\frac{\pi}{4})=1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^3(\frac{\pi}{4}+h)-f^3(\frac{\pi}{4})}{h}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰- خطی که از دو نقطهٔ $(-1,0)$ و $(0,\frac{1}{3})$ می‌گذرد، بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=1$ عمود است. حاصل حد عبارت $\frac{f^2(x)+f(x)-6}{f(x)(2-2x)}$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

محل انجام محاسبات

حسابان ۲: مشتق: صفحه‌های ۷۱ تا ۸۹ — وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

دانش‌آموزانی که خود را برای کنکور مرحلهٔ اول آماده می‌کنند، باید به این دسته سؤالات (پیشروی سریع) نیز، پاسخ دهند.

۱۱- کدام تابع در $x=0$ نقطه گوشه‌ای دارد؟

۱) $y=\sqrt[3]{x}$

۲) $y=x\sqrt[3]{x}$

۳) $y=|x|$

۴) $y=x|x|$

۱۲- تابع $f(x)=|x+\frac{1}{2}|-[x]$ در بازهٔ $(-1\,,\,1)$ چند نقطهٔ مشتق‌ناپذیر دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۱۳- اگر $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ باشد، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $[0\,,\,4]$

۲) $[0\,,\,2]$

۳) $[0\,,\,2)$

۴) $(0\,,\,4)$

۱۴- اگر $f(x)=\begin{cases}1-x & ;\ x<1\\ x^2-2x+2 & ;\ x\geq 1\end{cases}$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع fof با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $y=x^2-4|x|$

۲) $y=x|x^2-4x|$

۳) $y=|x^2-4|x||$

۴) $y=|x^2-4x|$

۱۵- خط مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-ax-1}}{x-a+1}$ از خطوط مماس قائم بر نمودار آن، فاصله برابری دارد. مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{2}$

۲) ۱

۳) $-\sqrt[3]{2}$

۴) ۱-

محل انجام محاسبات

۱۶- تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر دو تابع $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3+ax^2+(3a-4)x}$ و $g(x)=||x+1|+a-5|$ یکسان است. چند عدد طبیعی به جای a می‌توان قرار داد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۷- تابع $f(x)=(x^2+(m+2n)x)[x^2+nx]$ در $x=2$ مشتق مخالف صفر دارد. اگر $f'_+(0)=10$ باشد، حاصل $m-n$ کدام است؟ ($n\in\mathbb{Z}$ و [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۲-
۴) ۴-

۱۸- خط $3x-2y=5+a$ در $x=3$ بر نمودار تابع f عمود است. اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-2h)}{h}=a+6$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۳-
۳) ۶
۴) ۶-

۱۹- تابع $y=x^3$ در $x=x_0$ نمودار وارون خود را قطع می‌کند. عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2+\sqrt{x}-1$ در $x=x_0$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $-\frac{3}{2}$
۳) ۳
۴) $-\frac{2}{3}$

۲۰- مشتق راست تابع $f(x)=\sqrt{3x^2-x\sqrt{1-\cos 4x}}$ در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$
۲) $\sqrt{2}+1$
۳) $-(\sqrt{2}+1)$
۴) $-(\sqrt{2}-1)$

محل انجام محاسبات

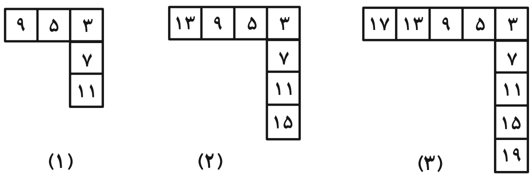
ریاضی پایه: ریاضی ۱: مجموعه، الگو و دنباله، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۱ تا ۲۷ و ۴۷ تا ۶۷ / **حسابان ۱: جبر و معادله:** صفحه‌های ۱ تا ۶ — وقت پیشنهادی: **۱۵ دقیقه**

۲۱- جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی $a_n: -\frac{1}{2}, 1, \dots$ چند برابر جملهٔ دوازدهم دنبالهٔ حسابی $b_n: -\frac{1}{2}, 1, \dots$ است؟

۱) $\frac{256}{13}$ ۲) ۱۶

۳) $\frac{512}{13}$ ۴) ۳۲-

۲۲- با توجه به الگوی زیر، مجموع بزرگ‌ترین اعداد سطر و ستون در شکل سی‌اُم کدام است؟ آزمون وی ای پی



۱) ۲۵۶

۲) ۲۴۴

۳) ۲۴۸

۴) ۲۵۲

۲۳- جملات دوم، ششم و نهم دنبالهٔ $t_n = an^2 + bn + c$ به ترتیب برابر با ۴، ۱۳ و ۲۵ است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{4}$

۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۳

۲۴- جمله‌های اول، دوم و چهارم یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. در دنبالهٔ هندسی مجموع بیست جملهٔ اول چند برابر مجموع ده جملهٔ اول است؟

۱) ۱۰۲۵   ۲) ۵۱۳

۳) ۱۰۲۳   ۴) ۵۱۱

۲۵- در دنبالهٔ حسابی $3, -1, -5, \dots$ مجموع بیست جملهٔ نخست با شمارهٔ جملات مضرب ۳ کدام است؟

۱) ۲۳۸۰-   ۲) ۸۶۰-

۳) ۱۵۶۰-   ۴) ۶۴۰-

محل انجام محاسبات

۲۶- ۱۰ عضو از اعضای مجموعهٔ $A = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ..., ۱۰۰\}$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که این اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند.

در چند حالت قدرنسبت دنباله بزرگ‌تر از ۸ است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۲۷- اگر $\frac{۵۴^m \times ۲۴^n}{۴۸^m \times ۱۸^n} = ۶$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۱
۳) ۵
۴) ۱۴

۲۸- حاصل عبارت $\frac{۱}{۴+\sqrt{۱۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰}} + \frac{۱}{۲+\sqrt{۷}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) ۲

۲۹- اگر $A = \frac{۲}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}$ باشد، حاصل $\sqrt{A+۵+\frac{۴}{A}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}+۱$
۳) $\sqrt{۲}+۱$
۴) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

۳۰- اگر $x = a$ جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $(x-۳)(x+۵) = ۱۸x-۴۰$ باشد، حاصل $\sqrt{a}-\frac{۵}{\sqrt{a}}$ کدام است؟

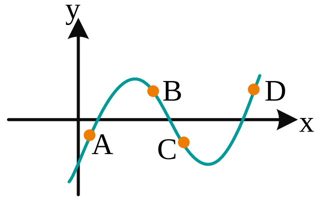
۱) $\sqrt{۱۴}$
۲) $\sqrt{۲۶}$
۳) $\sqrt{۶}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

محل انجام محاسبات

۱- خط $y=2x+3$ در دو نقطه $x=2$ و $x=-5$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)+f(h-5)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -4 ۴) 4

۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر $f(\alpha)$ و $f'(\alpha)$ ریشه‌های معادله $3x^2+7x+2=0$ باشند، آن‌گاه α طول کدام نقطه مشخص شده می‌تواند باشد؟

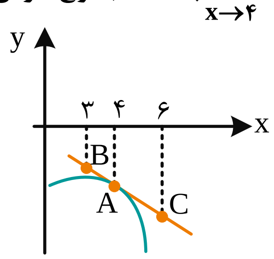


۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

۳- اگر $f(2)=3$ و $f'(2)=2m$ و $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-\sqrt{2x}}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-mh)-3}{h}$ باشد، مقدار غیرصفر $f'(2)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 4

۴- در شکل زیر، نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $x=4$ رسم شده است. اگر $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f^2(x)-9}{x-4}=3$ باشد، مجموع عرض‌های نقاط B و C چقدر است؟

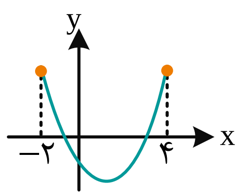


۱) -6
۲) $-6/5$
۳) -5
۴) $-5/5$

۵- خط گذرنده از نقاط $A(0,a)$ و $B(-a,-a)$ در نقطه $x=1$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(1-2h)-f^2(1)}{h^2-h}=-4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

۶- تابع متناوب f با دورهٔ تناوب ۶ مفروض است. اگر نمودار f در بازهٔ $[-2,4]$ به صورت سهمی مقابل و $f'(2)+f'(a)=0$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۲

محل انجام محاسبات

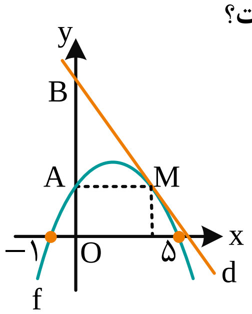
۷- اگر $f(x)=\dfrac{(x-۱)(x-۲)}{۲x+[\cos \pi x]}$ باشد، حاصل $f'(۱)-f'(۲)$ کدام است؟

۱) $-۱/۷۵$ ۲) $-۱/۶$ ۳) $-۱/۲$ ۴) $-۱/۲۵$

۸- اگر $f'(۲)=-۳$ و $\lim\limits_{h\to\infty} h\times(f(۲-\dfrac{۳}{h})-a)=۶a$ موجود و متناهی باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\dfrac{۲}{۳}$ ۴) $\dfrac{۱}{۳}$

۹- در شکل مقابل، خط d بر سهمی f مماس است. طول پاره‌خط AB چند برابر طول پاره‌خط OA است؟



۱) ۳
۲) ۳/۶
۳) ۳/۲
۴) ۴

۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۲-\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ باشد، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۱۱- اجتماع ورزشکاران در یک کلاس با ۲ رشته ورزشی ۳۶ نفر است. تعداد کسانی که فقط ورزش A را انجام می‌دهند دو برابر تعداد کسانی است که هر ۲ رشته ورزشی را انجام می‌دهند. اگر ۲۰ نفر ورزش B را انجام دهند، در این حالت، چند نفر فقط در یک رشته فعالیت دارند؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۱۲- a_n یک الگوی خطی و $b_n=na_n$ است به طوری که $a_۶=b_۲$ و $b_{۱۰}=۲۴۰$ می‌باشد. مقدار $\sqrt{b_۴-a_۴}$ چه عددی است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۲

۱۳- دنباله a_n با تعریف $a_n=\left[\sqrt{n^۲-۲n+۸}\right]$ را در نظر می‌گیریم. جمع چهل جمله ابتدایی آن کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷۸۵ ۲) ۷۸۱ ۳) ۷۷۴ ۴) ۷۸۳

محل انجام محاسبات

۱۴- سه جمله اول یک دنباله هندسی را به ترتیب در اعداد ۴، ۸ و ۱۶ ضرب کرده‌ایم و یک دنباله حسابی به دست آمده است. جمع هشت جمله ابتدایی دنباله هندسی چند برابر جمع سه جمله اول آن است؟

۱) $\frac{۱۲۷}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۵۵}{۲۲۴}$ ۳) $\frac{۱۲۷}{۷}$ ۴) $\frac{۲۵۵}{۱۲۷}$

۱۵- اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r را دو برابر کنیم، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت. مقدار $r+۲d$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

۱۶- بین دو عدد ۲- و ۱۰ حداقل چند واسطه حسابی درج کنیم تا جمع واسطه‌ها از ۶۰ بزرگ‌تر باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۷- ریشهٔ پنجم عدد مثبت a، ۱۶ برابر عدد a با توان $\frac{۱۱}{۵}$ است. حاصل $\sqrt{۴a+۸}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸- اگر $A=۲-\sqrt{۳}$، $B=۲+\sqrt{۳}$ و $M=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{۱}{۱+B^۳}}$ باشد، مقدار $M+\frac{۱}{M}$ چه عددی است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۹- هرگاه $A=\frac{۳\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۴}+\frac{۸+۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}$ باشد، مقدار $(A-۱)^۲$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) $۴-۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۴+۲\sqrt{۳}$

۲۰- اگر $A=۲-\sqrt{۳}$، $B=\sqrt[۳]{۱۶\sqrt[۳]{۴\sqrt{۸}}}$ و $\sqrt{A}B^k=۲-۲\sqrt{۳}$ باشد، مقدار k چه عددی است؟

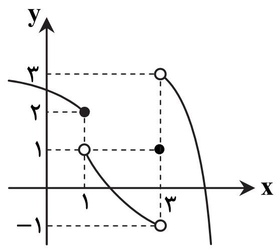
۱) $\frac{۳۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۱}$ ۳) $\frac{۹}{۳۱}$ ۴) $\frac{۲۷}{۳۱}$

محل انجام محاسبات

۱- برای تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{[x]-2}$، کدام حد تعریف می‌شود؟

۱) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ۳) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ ۴) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

۲- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(4-x)}{x+1}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۰/۵

۳) -۰/۵

۴) ۱/۵

۳- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\operatorname{Cos} x}{\sqrt{1+\operatorname{Sin} 3x}}$ ، کدام است؟

۱) $-\dfrac{2}{3}$ ۲) $\dfrac{2}{3}$ ۳) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

۴- اگر اعداد مثبت x_1، x_2 و x_3، طول سه نقطهٔ متوالی ناپیوستگی تابع $f(x)=\left[2\sqrt{x+1}\right]$ باشند، حداقل مقدار مجموع این سه عدد کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۱۱ ۴) ۹/۵

۵- با اضافه شدن نقطهٔ $A(1,a)$ به نقاط نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(3x^2+x-4)(x^2+3x-4)}{(x^2-2x+1)}$، تابعی همواره پیوسته به‌وجود می‌آید. مقدار a کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) -۲۱ ۳) -۲۸ ۴) ۳۵

۶- اگر $\dfrac{1}{a-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2+3x-4}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۷- تابع $f(x)=\begin{cases}\left|\operatorname{Sin}\dfrac{\pi x}{2}\right| & [x]\ \text{زوج} \\ m+nx+[x] & [x]\ \text{فرد}\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. زوج مرتب (m,n) کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $(1,-2)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(1,-1)$ ۴) $(2,-1)$

محل انجام محاسبات

۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x+\frac{\pi}{6})-\tan(2x+\frac{\pi}{6})}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۹- اگر $f(x)=\dfrac{(x^2-3x)\cos \pi x}{\sqrt{x^2-3x+4}}$، مقدار $f'(3)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $-\frac{3}{2}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) وجود ندارد.

۱۰- خط $y=mx$ در نقاط $x=1$ و $x=3$ و خط $y=-mx$ در نقاط $x=2$ و $x=4$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس‌اند. اگر $f'(1)+f'(3)=18+f'(2)$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۹
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۴

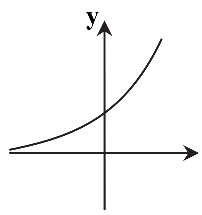
۱۱- کدام گزینه دربارهٔ مشتق راست و چپ تابع $f(x)=x^2+[-x]$ درنقطه‌ای به طول ۴ درست است؟

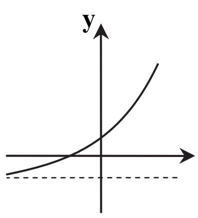
۱) $f'_+(4)$ موجود است و $f'_-(4)$ وجود ندارد.
۲) $f'_-(4)$ موجود است ولی $f'_+(4)$ وجود ندارد.
۳) $f'_+(4)$ و $f'_-(4)$ وجود دارند ولی با یکدیگر برابر نیستند.
۴) $f'_+(4)$ و $f'_-(4)$ هیچ‌کدام وجود ندارند.

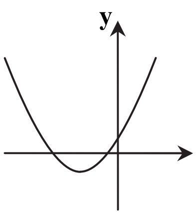
۱۲- کدام‌یک از توابع زیر مجانب قائم <u>ندارد</u>؟

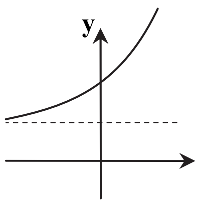
۱) $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$
۲) $g(x)=\dfrac{[-x]}{x}$
۳) $h(x)=\dfrac{[x^2]}{x}$
۴) $k(x)=\dfrac{[-x^2]}{x}$

۱۳- با توجه به حد تابع در بی‌نهایت، نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۴- تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته و $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^3(x)-1}{x^2-4}=\dfrac{1}{2}$ است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3-x)-f(1+x)}{x-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$
۲) $-\frac{4}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{4}{3}$

۱۵- به‌ازای کدام مقدار a، اختلاف شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست بر منحنی تابع $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{2x-[x]}$ در نقطهٔ $x=1$ برابر ۳ است؟

۱) ۶ یا ۸−
۲) ۴ یا ۶−
۳) ۴ یا ۸−
۴) ۴− یا ۶

محل انجام محاسبات

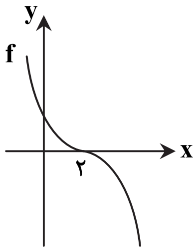
۱۶- اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{\cos 2x}}$ در مبدأ مختصات چقدر است؟

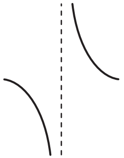
۱) ۱   ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

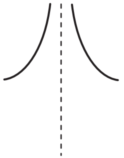
۱۷- اگر $\frac{\pi}{4}<a<\frac{5\pi}{4}$ و $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x+b}{\cos^2 x+\cos x}=-\infty$ باشد، حداقل مقدار $[b]$ کدام است؟

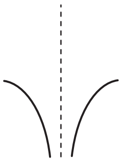
۱) -10 ۲) -9 ۳) -8 ۴) -7

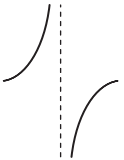
۱۸- نمودار شکل روبه‌رو فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار $y=x^3$ به‌دست آمده است. نمودار تابع $y=\frac{1}{f(x-6)}-\frac{1}{f^{-1}(x)}$ در اطراف مجانب قائم خود چگونه است؟



۱)


۲)


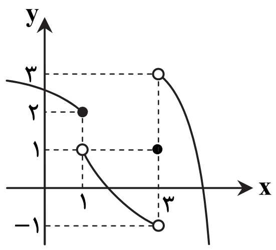
۳)


۴)


۱- برای تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{[x]-۲}$، کدام حد تعریف می‌شود؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$

۲- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f(۴-x)}{x+۱}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۰/۵

۳) −۰/۵

۴) ۱/۵

۳- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\frac{\cos x}{\sqrt{۱+\sin ۳x}}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۴- اگر اعداد مثبت $x_۱$ ، $x_۲$ و $x_۳$ ، طول سه نقطهٔ متوالی ناپیوستگی تابع $f(x)=\left[۲\sqrt{x+۱}\right]$ باشند، حداقل مقدار مجموع این سه عدد کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۱۱ ۴) ۹/۵

۵- با اضافه شدن نقطهٔ $A(۱,a)$ به نقاط نمودار تابع $f(x)=\frac{(۳x^۲+x-۴)(x^۲+۳x-۴)}{(x^۲-۲x+۱)}$، تابعی همواره پیوسته به‌وجود می‌آید. مقدار a کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) −۲۱ ۳) −۲۸ ۴) ۳۵

۶- اگر $\frac{۱}{a-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲+۳x-۴}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۷- تابع $f(x)=\begin{cases}\left|\sin\frac{\pi x}{۲}\right| & [x]\ \text{زوج} \\ m+nx+[x] & [x]\ \text{فرد}\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. زوج مرتب (m,n) کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $(۱,-۲)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۱,-۱)$ ۴) $(۲,-۱)$

محل انجام محاسبات

۸- حاصل $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(5x+\frac{\pi}{6})-\tan(2x+\frac{\pi}{6})}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- اگر $f(x)=\dfrac{(x^2-3x)\operatorname{Cos}\pi x}{\sqrt{x^2-3x+4}}$، مقدار $f'(3)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) وجود ندارد.

۱۰- خط $y=mx$ در نقاط $x=1$ و $x=3$ و خط $y=-mx$ در نقاط $x=2$ و $x=4$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس‌اند. اگر $f'(1)+f'(3)=18+f'(2)$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۱- کدام گزینه دربارهٔ مشتق راست و چپ تابع $f(x)=x^2+[-x]$ درنقطه‌ای به طول ۴ درست است؟

۱) $f'_+(4)$ موجود است و $f'_-(4)$ وجود ندارد.

۲) $f'_-(4)$ موجود است ولی $f'_+(4)$ وجود ندارد.

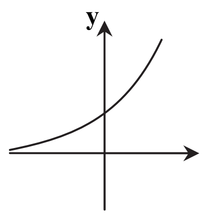
۳) $f'_+(4)$ و $f'_-(4)$ وجود دارند ولی با یکدیگر برابر نیستند.

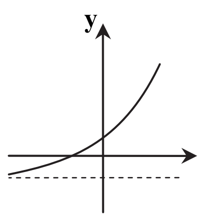
۴) $f'_+(4)$ و $f'_-(4)$ هیچ‌کدام وجود ندارند.

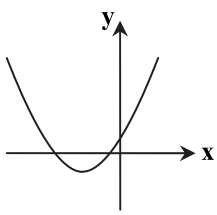
۱۲- کدام‌یک از توابع زیر مجانب قائم ندارد؟

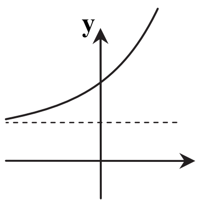
۱) $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ ۲) $g(x)=\dfrac{[-x]}{x}$ ۳) $h(x)=\dfrac{[x^2]}{x}$ ۴) $k(x)=\dfrac{[-x^2]}{x}$

۱۳- با توجه به حد تابع در بی‌نهایت، نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۴- تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته و $\lim_{x\to 2}\dfrac{f^3(x)-1}{x^2-4}=\dfrac{1}{2}$ است. حاصل $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(3-x)-f(1+x)}{x-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۵- به‌ازای کدام مقدار a، اختلاف شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست بر منحنی تابع $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{2x-[x]}$ در نقطهٔ $x=1$ برابر ۳ است؟

۱) ۶ یا ۸− ۲) ۴ یا ۶− ۳) ۴ یا ۸− ۴) ۴− یا ۶

محل انجام محاسبات

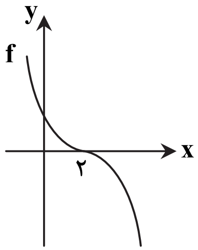
۱۶- اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{\cos 2x}}$ در مبدأ مختصات چقدر است؟

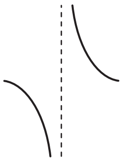
۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

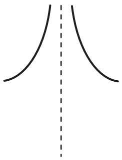
۱۷- اگر $\frac{\pi}{4}<a<\frac{5\pi}{4}$ و $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x+b}{\cos^2 x+\cos x}=-\infty$ باشد، حداقل مقدار $[b]$ کدام است؟

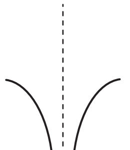
۱) -10 ۲) -9 ۳) -8 ۴) -7

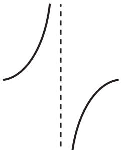
۱۸- نمودار شکل روبه‌رو فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار $y=x^3$ به‌دست آمده است. نمودار تابع $y=\frac{1}{f(x-6)}-\frac{1}{f^{-1}(x)}$ در اطراف مجانب قائم خود چگونه است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


حسابان دوازدهم: صفحه‌های ۸۴ تا ۱۱۰

۱- f یک چندجمله‌ای از درجه‌دوم با شرط $f''(x) < 0$ است، به طوری که $f'of(x) = 8x^2 - 12x - 3$. مقدار $fof'(2)$ چه عددی است؟

۱) −۶۳ / ۵   ۲) −۶۶ / ۵   ۳) −۵۳ / ۵   ۴) −۵۱ / ۵

۲- f تابعی مشتق‌پذیر است، به طوری که $g(x) = f(4\cos^2 x + 3\tan x)$. اگر $g'(\frac{3\pi}{4}) = 3$، آن‌گاه مقدار $f'(-1)$ چه عددی است؟

۱) −۰ / ۶   ۲) ۰ / ۶   ۳) ۰ / ۳   ۴) −۰ / ۳

۳- با فرض آن‌که $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f'(x)$ بر $f''(x)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{9}{2}$ ۴) $-\frac{7}{2}$

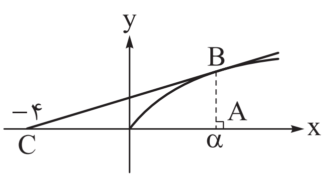
۴- هرگاه $g(0) = 2$ و $f'(0) = 4$، به طوری که $f(2x) = 8x - 2g^3(3x)$ باشد، مقدار $\frac{g''(0)}{f''(0)}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{54}$ ۲) $-\frac{1}{54}$ ۳) $-\frac{1}{216}$ ۴) $\frac{1}{216}$

۵- هرگاه $f(x) = 6x + \frac{a}{x}$، به طوری که $f'(1) = f''(1)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲   ۲) −۲   ۳) ۴   ۴) −۴

۶- نمودار $y = \sqrt{x}$ و خط مماس بر آن در نقطهٔ $x = \alpha$، رسم شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $5\sqrt{6}$

۲) $\frac{12}{\sqrt{2}}$

۳) ۸

۴) $7\sqrt{3}$

۷- حاصل $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos 2x \cos 3h + \sin 2x \sin 3h - \cos 2x}{h}$ کدام است؟

۱) $-6\sin 2x$ ۲) $-2\sin 2x$ ۳) $6\sin 2x$ ۴) $-3\sin 2x$

محل انجام محاسبات

۸- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=۲x-\sqrt{x}$ در بازهٔ $[۱,a]$، با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۴$ برابر است. مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲۳}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۹- استوانه‌ای درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده است، به طوری که حجم استوانه تابعی از ارتفاع آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم استوانه در صورتی که ارتفاع استوانه برابر با ۴ باشد، چه عددی است؟

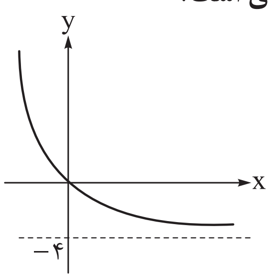
۱) ۲π ۲) ۸π ۳) ۱۲π ۴) ۴π

حسابان یازدهم: صفحه‌های ۷۱ تا ۹۰

۱۰- نمودار دو تابع $y=۹^x-۱$ و $y=۴\times۳^x-۴$، در نقاط A و B متقاطع هستند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۹}$ ۲) $\sqrt{۵۳}$ ۳) $\sqrt{۶۵}$ ۴) $\sqrt{۶۳}$

۱۱- نمودار وارون تابع $f(x)=-\log_۲(ax+b)$ به صورت زیر است. مقدار $f^{-۱}(-۳)$ چه عددی است؟



۱) ۲۱
۲) $\frac{۱۴}{۳}$
۳) ۱۴
۴) ۲۸

۱۲- فرض کنیم $f(x)=\log_۲ ۴x$ باشد. در این صورت نمودار تابع $y=۲f(\frac{۲}{x})$ بر کدام تابع منطبق است؟

۱) $۱۰-۲f(x)$ ۲) $۸-۳f(x)$ ۳) $۶-f(x)$ ۴) $۸+۲f(x)$

۱۳- اگر تابع f به صورت $f(x)=x-[x]$ باشد و مقدار $f(\log_۲ ۲۴)$ با $f(\log_۲ n)$ برابر باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۸   ۲) ۹۶   ۳) ۵۴   ۴) ۳۶

۱۴- معادلهٔ $\log_{\sqrt{x}} k+۲\log_{k^۲} x=۳$ علاوه بر $x=۴$، ریشهٔ دیگر برابر با α دارد. مقدار α چه عددی است؟

۱) ۸ یا ۲   ۲) ۱۶ یا ۲   ۳) ۸ یا ۱۶   ۴) فقط ۱۶

محل انجام محاسبات

۱۵- هرگاه $\log_{6}(2a+b)=\log_{2}4a=\log_{3}3b$، مقدار $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ چه عددی است؟

۱) ۱۲　　۲) ۶　　۳) ۳　　۴) ۹

۱۶- اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $\log_{2}(3\times 2^{x}-4)=2x-1$ با یکدیگر چه عددی است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $\frac{3}{2}$　　۴) $\frac{1}{2}$

۱۷- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=\frac{2^{x+1}}{2^{x}+1}$ باشد، مقدار $f(1)+g(\frac{16}{9})$ چه عددی است؟

۱) ۵　　۲) $\frac{13}{3}$　　۳) $\frac{28}{3}$　　۴) ۶

۱۸- دوچرخه‌ای در هر روز ۴ درصد باد موجود در لاستیک خودش را از دست می‌دهد. چه‌قدر طول می‌کشد تا باد دوچرخه به $\frac{1}{5}$ باد اولیهٔ خود برسد؟ $(\log 2=0/3 ,\log 3=0/47)$

۱) $\frac{80}{3}$ روز　　۲) ۲۵ روز　　۳) ۲۴ روز　　۴) $\frac{70}{3}$ روز

حسابان ۲

۱- گزینهٔ «۲» *(عادل حسینی)*

در یک همسایگی $x=-3$ تابع f با تابع $y=-5x-1$ مساوی است و از آنجا که شیب این خط برابر ۵- است، شیب خط مماس بر نمودار تابع یا همان $f'(-3)$ برابر ۵- است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴)

۲- گزینهٔ «۱» *(طاهر دارستانی)*

تعریف مشتق را می‌نویسیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{|(x-1)^{\frac{4}{3}}|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x-1)^{\frac{1}{3}}=0$$

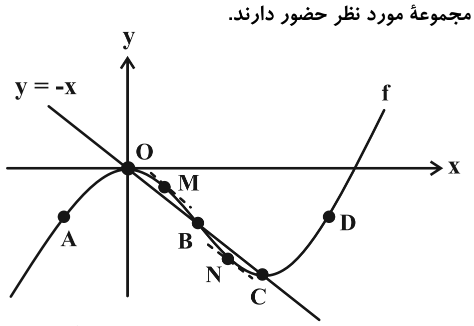
(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۰)

۳- گزینهٔ «۳» *(عادل حسینی)*

$$g(x)=\sqrt{x\left(\frac{f'(x)+1}{f'(x)}\right)}\Rightarrow D_g=\left\{x \mid x\left(\frac{f'(x)+1}{f'(x)}\right)\ge0\right\}$$

اگر $x\le0$ باشد، باید $\frac{f'(x)+1}{f'(x)}\le0$ یا $-1\le f'(x)<0$ باشد که در x های منفی امکان‌پذیر نیست.

اگر $x>0$ باشد، باید $f'(x)>0$ یا $f'(x)\le-1$ باشد که با توجه به شکل زیر این مجموعه $[x_M , x_N]\cup(x_C , +\infty)$ است. نقاط B و D در مجموعهٔ مورد نظر حضور دارند.



نقاط M و N نقاطی روی نمودار هستند که مشتق در آن‌ها دقیقاً برابر ۱- می‌شود.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴)

۴- گزینهٔ «۴» *(جمشید عباسی)*

عبارت $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تعریف مشتق تابع است:

$$\Rightarrow f'(x)=3x\Rightarrow f'(3)=9$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{1}{6}f'(3)=\frac{3}{2}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۵- گزینهٔ «۱» *(جمشید عباسی)*

$f(-2)=-2$ و با توجه به نمودار $f'(-2)=\frac{1}{2}$ است؛ زیرا شیب خط مماس رسم شده برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow g'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)f(x)}{x+2}=f(-2)=-2$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۰)

۶- گزینهٔ «۳» *(عادل حسینی)*

خط بر نمودار تابع f مماس است؛ یعنی $f(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{2}$ و $f'(-\frac{1}{2})=3$ است. حال چون $\frac{\frac{7}{2}+(-\frac{1}{2})}{2}=\frac{3}{2}$ (طول رأس سهمی) است، نقاط به طول $x=-\frac{1}{2}$ و $x=\frac{7}{2}$ روی نمودار تابع f هم‌عرض‌اند و در نتیجه مشتق تابع در این نقاط قرینهٔ یکدیگرند. پس $f'(\frac{7}{2})=-3$ است. داریم:

$x=\frac{7}{2}$ خط مماس در: $y-f(\frac{7}{2})=f'(\frac{7}{2})(x-\frac{7}{2})$

$$y+\frac{5}{2}=-3(x-\frac{7}{2})\Rightarrow y=-3x+8$$

عرض از مبدأ این خط برابر ۸ است.

(حسابان ۲- مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸۰)

۷- گزینهٔ «۲» *(حمید علیزاده)*

از تعریف حد در تساوی $\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-5}{h}=-6$ نتیجه می‌گیریم که $f(2)=5$ است؛ زیرا تابع f در $x=2$ پیوسته است. همچنین $2f'(2)=-6$ و در نتیجه $f'(2)=-3$ است. حال معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع در $x=2$ را می‌نویسیم:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=-3x+11$$

$f(4)=0$ و عرض نقطه به طول $x=4$ روی خط مماس برابر ۱- است، پس داریم: $\Delta=f(4)-y_{\text{خط مماس}}=1$

عرض نقطه به طول $x=1$ روی خط مماس برابر ۸ است و اختلاف این عدد با $f(1)$ برابر $2\Delta=2$ است، در نتیجه $f(1)=8+2=10$ است.

(حسابان ۲- مشابه تمرین صفحهٔ ۸۳)

۸- گزینهٔ «۴» *(عادل حسینی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع $h(x)=(f-g)(x)$ را می‌سازیم:

$$h(x)=x\log_2 x^2-\log_4 x=2x\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$=(2x-\frac{1}{2})\log_2 x$$

$h(\frac{1}{4})=0$ است و برای مشتق آن داریم:

$$h'(\frac{1}{4})=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{(2x-\frac{1}{2})\log_2 x}{x-\frac{1}{4}}=2\log_2\frac{1}{4}=-4$$

پس معادلهٔ خط مماس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y-0=-4x+1\Rightarrow 4x+y-1=0$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۰)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(حبیب شفیعی)*

$$\lim_{h\to0}\frac{f^3(\frac{\pi}{4}+h)-f^3(\frac{\pi}{4})}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(f(\frac{\pi}{4}+h)-f(\frac{\pi}{4}))(f^2(\frac{\pi}{4}+h)+f(\frac{\pi}{4})f(\frac{\pi}{4}+h)+f^2(\frac{\pi}{4}))}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+h)-f(\frac{\pi}{4})}{h}\times\lim_{h\to0}(f^2(\frac{\pi}{4}+h)+f(\frac{\pi}{4})f(\frac{\pi}{4}+h)+f^2(\frac{\pi}{4}))$$

$$=f'(\frac{\pi}{4})\times3f^2(\frac{\pi}{4})$$

$$\xrightarrow{f(\frac{\pi}{4})=f'(\frac{\pi}{4})=1}3f'(\frac{\pi}{4})f^2(\frac{\pi}{4})=3$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(کیا مقدس‌نیاک)*

شیب خط: $m=\frac{-1-0}{0-\frac{1}{3}}=\frac{-1}{-\frac{1}{3}}=3$

معادلهٔ خط: $y-(-1)=3(x-0)\Rightarrow y=3x-1$

این خط در نقطهٔ $x=1$ بر تابع f عمود است، پس:

$$f(1)=3(1)-1=2\ ,\ \ f'(1)=\frac{-1}{m}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f^2(x)+f(x)-6}{f(x)(2-2x)}=\lim_{x\to1}\frac{(f(x)+3)(f(x)-2)}{f(x)(2-2x)}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}}_{f'(1)}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{-2f(x)}=(-\frac{1}{3})\times\frac{2+3}{-2(2)}$$

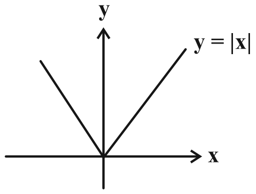
$$=(-\frac{1}{3})\times(-\frac{5}{4})=\frac{5}{12}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

حسابان ۲- پیشروی سریع

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

نمودار تابع $y=|x|$ مطابق شکل زیر است:



که در $x=0$ مشتق‌های چپ و راست متناهی اما نابرابر دارد.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۹)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

تابع $y=|x+\frac{1}{2}|$ در $x=-\frac{1}{2}$ و تابع $y=[x]$ در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است، پس تابع f در $x\in\{-\frac{1}{2}, 0\}$ مشتق‌ناپذیر است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(طاهر دارستانی)*

دامنهٔ تابع f بازهٔ $[0, 4]$ است؛ زیرا:

$$4x-x^2=x(4-x)\ge0\Rightarrow D_f=[0, 4]$$

تابع f در همسایگی چپ $x=0$ و همسایگی راست $x=4$ تعریف نشده‌است، بنابراین در $x=0$ مشتق چپ و در $x=4$ مشتق راست ندارد. پس در این نقاط f' تعریف نمی‌شود. به علاوه، می‌توان گفت:

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=+\infty\ \ ,\ \ \lim_{x\to4^-}f'(x)=-\infty$$

پس داریم:

$$D_{f'}=D_f-\{0, 4\}=(0, 4)$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(شاهین پروازی)*

ابتدا تابع fof را حساب می‌کنیم:

$$(fof)(x)=\begin{cases}1-f(x) & ;\ f(x)<1\\ (f(x)-1)^2+1 & ;\ f(x)\ge1\end{cases}$$

$$\Rightarrow(fof)(x)=\begin{cases}x^2+1 & ;\ x\le0\\ x & ;\ 0<x<1\\ (x-1)^4+1 & ;\ x\ge1\end{cases}$$

تابع fof در $x=0$ ناپیوسته و در $x=1$ مشتق‌های چپ و راست نابرابر دارد، پس این تابع ۲ نقطه مشتق‌ناپذیر دارد. مجموعه نقاط مشتق‌ناپذیر توابع داده شده در گزینه‌ها به ترتیب $\{0\}$، $\{4\}$، $\{4, 0, -4\}$ و $\{4, 0\}$ است، پس تابع fof و تابع گزینهٔ «۴» در تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر یکسان هستند.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۵- گزینهٔ «۴» (کامیار علّیون)

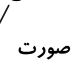
خط $x=a-1$ مجانب قائم نمودار تابع است و معادله خطوطی که بر نمودار تابع مماس قائم هستند، صفرهای تابع یا جواب‌های معادلهٔ $x^2-ax-1=0$ هستند. مجانب قائم از این دو خط فاصلهٔ یکسانی دارد، یعنی وسط آن‌ها است، در نتیجه $a-1$ باید میانگین ریشه‌های معادلهٔ $x^2-ax-1=0$ یا طول رأس سهمی $y=x^2-ax-1$ باشد، پس داریم:

$$a-1=\frac{a}{2}\Rightarrow a=2$$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2-2x-1}}{x-1}\Rightarrow f(a)=f(2)=\frac{-1}{1}=-1$$

(حسابان ۲- مکمل مثال صفحهٔ ۸۸)

۱۶- گزینهٔ «۲» (مسعود برملا)

نمودار تابع g به ازای $a-5\ge 0$ به صورت  و به ازای $a-5<0$ به صورت  خواهد بود. این یعنی تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع g می‌تواند ۱ یا ۳ باشد. حال باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $\frac{1}{2}x^3+ax^2+(3a-4)x=0$ را برابر ۱ یا ۳ قرار دهیم:

$$\Rightarrow x(\frac{1}{2}x^2+ax+3a-4)=0$$

یکی از ریشه‌ها $x=0$ است، پس اگر Δی عبارت درجهٔ دوم منفی باشد، همین یک ریشه را دارد و اگر Δ مثبت باشد، سه ریشه دارد.

$$\Delta=a^2-2(3a-4)=a^2-6a+8=(a-2)(a-4)$$

$$\xrightarrow{\Delta<0}2<a<4\xrightarrow{\cap a\ge 5}\varnothing$$

حالت یک نقطه مشتق‌ناپذیر امکان ندارد.

$\xrightarrow{\Delta>0}a<2$ یا $a>4\xrightarrow{a<5}a\in(-\infty,2)\cup(4,5)$

اما دقت کنید که به ازای $a=\frac{4}{3}$، تابع f دو نقطه مشتق‌ناپذیر خواهدداشت، پس حدود قابل قبول برای a مجموعه $(-\infty,\frac{4}{3})\cup(\frac{4}{3},2)\cup(4,5)$ است. تعداد اعداد طبیعی این مجموعه برابر ۱ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۷- گزینهٔ «۱» (جهانبخش نیکنام)

مقدار عبارت x^2+nx به ازای $x=2$ صحیح است. این یعنی اگر $x=2$ طول یک نقطه غیر از نقطهٔ رأس سهمی $y=x^2+nx$ باشد، تابع $y=[x^2+nx]$ در $x=2$ مشتق‌ناپذیر است و برای این‌که f مشتق‌پذیر شود، لازم است $x=2$ ریشهٔ مضاعف عبارت $x^2+(m+2n)x$ شود که این امکان‌پذیر نیست. در نتیجه $x=2$ طول رأس سهمی $y=x^2+nx$ است:

$$\Rightarrow -\frac{n}{2}=2\Rightarrow n=-4\Rightarrow f(x)=(x^2+(m-8)x)[x^2-4x]$$

حال از تساوی $f'_+(0)=10$ مقدار m را پیدا می‌کنیم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2+(m-8)x)(-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(-x-m+8)=10\Rightarrow m=-2$$

دقت کنید که اگر $x\to 0^+$، $[x^2-4x]=[0^-]=-1$.

$$\Rightarrow m-n=-2+4=2$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۸- گزینهٔ «۳» (یاسین سپهر)

شیب خط برابر $\frac{3}{2}$ است و از آنجا که در $x=3$ بر نمودار تابع f عمود است، $f'(3)=-\frac{2}{3}$ است. حال داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0)$$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-2h)}{h}=3f'(3)=-2=a+6\Rightarrow a=-8$$

پس معادلهٔ خط عمود $3x-2y=-3$ است و با جای‌گذاری $x=3$ عرض نقطه یا همان $f(3)$ برابر ۶ به دست می‌آید.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱۹- گزینهٔ «۲» (عباس خسروکردی)

نمودار تابع $y=x^3$ وارون خود را در $x=x_0\in\{-1,0,1\}$ قطع می‌کند. اما با توجه به ضابطهٔ تابع f، $x_0=1$ مد نظر است؛ زیرا $x_0=-1$ در دامنه تابع قرار ندارد و همچنین تابع در $x_0=0$ مشتق ندارد.

$$\Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)+\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\Rightarrow f'(1)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

یعنی خط مماس، خطی است که با شیب $\frac{5}{2}$ از نقطهٔ $(1,1)$ می‌گذرد:

$\Rightarrow$ خط مماس: $y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$

عرض از مبدأ این خط برابر $-\frac{3}{2}$ است.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۰)

۲۰- گزینهٔ «۱» (کامیار علّیون)

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3x^2-x\sqrt{1-\cos 4x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{3-\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{3-\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{x^2}}}$$

با استفاده از اتحاد $1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$ داریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{3-\sqrt{\frac{2\sin^2 2x}{x^2}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{3-\sqrt{\frac{8x^2}{x^2}}}$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=f'_+(0)=\sqrt{2}-1$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۰ و ۸۷)

ریاضی پایه

۲۱- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $a_n = -\frac{1}{2}\times(-2)^{n-1}$ و جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $b_n = \frac{3}{2}n - 2$ است. پس داریم:

$$a_{10} = -\frac{1}{2}\times(-2)^9 = (-2)^8 = 256$$

$$b_{12} = \frac{3}{2}(12) - 2 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{a_{10}}{b_{12}} = \frac{256}{16} = 16$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** (جهانبخش نیکنام)

روش اول: تعداد مربع‌ها در شکل سؤال دنبالهٔ خطی است و از رابطهٔ $t_n = 2n + 3$ به دست می‌آید. پس در شکل سی‌اُم تعداد مربع‌ها برابر است با $63 = 3 + 30 \times 2$ که ۳۲ مربع از آن در ستون قرار دارد. اعداد روی ستون تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ می‌دهد و بزرگ‌ترین عدد روی ستون برابر است با: $3 + 31\times 4 = 127$

و بزرگ‌ترین عدد روی سطر ۱۲۵ است. پس داریم: $127 + 125 = 252$

روش دوم: مجموع بزرگ‌ترین اعداد سطر و ستون دنبالهٔ زیر را می‌سازند:

$20, 28, 36, \ldots$

که از الگوی $t_n = 8n + 12$ پیروی می‌کند. پس مجموع بزرگ‌ترین اعداد سطر و ستون شکل سی‌اُم برابر $t_{30} = 8\times 30 + 12 = 252$ است.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۲۳- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

$$t_n = an^2 + bn + c$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 4 \\ 36a + 6b + c = 13 \\ 81a + 9b + c = 25 \end{cases} \xrightarrow{c = 4 - 4a - 2b} \begin{cases} 32a + 4b = 9 \\ 45a + 3b = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{5}{2} \Rightarrow a + b + c = 3$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۵)

۲۴- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

جملات دنباله حسابی را t_1، $t_1 + d$ و $t_1 + 3d$ در نظر می‌گیریم که این جمله باید تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، پس داریم:

$$t_1(t_1 + 3d) = (t_1 + d)^2 \Rightarrow t_1^2 + 3t_1d = t_1^2 + 2t_1d + d^2$$

$$\Rightarrow t_1d = d^2 \xrightarrow{d\neq 0} t_1 = d$$

پس قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر $r = \frac{t_1 + d}{t_1} = 2$ است. مجموع ۱۰ جمله و ۲۰ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = t_1(2^{10} - 1) \quad , \quad S_{20} = t_1(2^{20} - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{20}}{S_{10}} = \frac{2^{20} - 1}{2^{10} - 1} = 2^{10} + 1 = 1025$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱ تا ۶)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** (یاسین سپهر)

بیست جملهٔ نخست با شمارهٔ جملات مضرب ۳ عبارتند از:

$a_3 , a_6 , a_9 , \ldots , a_{60}$

در این دنباله جملهٔ اول $a_3 = -5$ و قدرنسبت ۳ برابر قدرنسبت دنبالهٔ داده شده یعنی ۱۲- است. پس داریم:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2\times(-5) + (20-1)(-12)) = -2380$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱ تا ۶)

۲۶- **گزینهٔ «۲»** (مسعود برملا)

جملهٔ اول دنبالهٔ $a_1 \geq 10$ و قدرنسبت $d \geq 9$ است. جملهٔ دهم دنباله هم نباید بزرگ‌تر از ۱۰۰ باشد. $a_{10} = a_1 + 9d \leq 100$

برای d فقط دو مقدار ۹ و ۱۰ قابل قبول است. برای هر دو مقدار تعداد دنباله را حساب می‌کنیم:

الف)

$$d=10 \Rightarrow a_1+90\le 100 \Rightarrow a_1 \le 10 \xrightarrow{a_1\ge 10} a_1=10$$

یعنی فقط یک دنباله برای $d=10$ پیدا می‌شود.

ب)

$$d=9 \Rightarrow a_1+81\le 100 \Rightarrow a_1\le 19 \xrightarrow{a_1\ge 10} 10\le a_1\le 19$$

یعنی برای $d=9$، $19-10+1=10$ دنبالهٔ متفاوت پیدا می‌شود. در نهایت ۱۱ دنباله با شرایط مطلوب پیدا می‌شود.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

عبارت داده شده را برحسب توان‌هایی از ۲ و ۳ می‌نویسیم:

$$\frac{54^m\times 24^n}{48^m\times 18^n}=\frac{2^m\times 3^{3m}\times 2^{3n}\times 3^n}{2^{4m}\times 3^m\times 2^n\times 3^{2n}}=2^{2n-3m}\times 3^{2m-n}=2\times 3$$

در نتیجه به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم و داریم:

$$\begin{cases}2n-3m=1\\ 2m-n=1\end{cases}\Rightarrow m=3\ ,\ n=5\Rightarrow m+n=8$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۲)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

روش اول:

$$\frac{1}{2+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}\quad ,\quad \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{3}\quad ,\quad \frac{1}{4+\sqrt{13}}=\frac{4-\sqrt{13}}{3}$$

پس حاصل عبارت برابر است با: $A=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}$

روش دوم: اگر a_n جملات یک دنباله حسابی باشند، تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}$$

در این سوال جملات دنبالهٔ $16\ ,\ 13\ ,\ 10\ ,\ 7\ ,\ 4 : a_n=3n+1$ را داریم. پس حاصل عبارت برابر است با: $A=\frac{\sqrt{16}-\sqrt{4}}{3}=\frac{2}{3}$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

هر کدام از عبارت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} A=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}}=\dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\\ =\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}\\ \dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\\ \Rightarrow \dfrac{4}{A}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A+\frac{4}{A}+5}=\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+5}$$

$$=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

ابتدا معادله را می‌سازیم:

$$x^2+2x-15=18x-40\Rightarrow x^2-16x+25=0$$

جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند. پس داریم:

$$a^2-16a+25=0\Rightarrow a^2+25=16a$$

$$\Rightarrow a+\frac{25}{a}=16 \qquad (*)$$

حال طرفین تساوی $T=\sqrt{a}-\frac{5}{\sqrt{a}}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$T^2=a+\frac{25}{a}-10\xrightarrow{(*)}T^2=16-10=6\Rightarrow T=\sqrt{6}$$

a را جواب بزرگ‌تر در نظر گرفته‌ایم. پس $T>0$ است.

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۱- خط $y=۲x+۳$ در دو نقطه $x=۲$ و $x=-۵$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)+f(h-۵)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر　۲) -۲　۳) -۴　۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴　(متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

نکته:

اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a)}{h}=mf'(a)$$

پاسخ تشریحی:

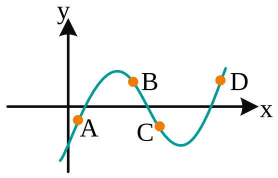
چون $f(۲)=۷$، $f(-۵)=-۷$، $f'(۲)=۲$ و $f'(-۵)=۲$ است، پس:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)+f(h-۵)}{h}=\lim_{h\to ۰}\Big(\frac{f(۲+h)-\overset{۷}{\uparrow}{f(۲)}}{h}+\frac{f(-۵+h)-\overset{-۷}{\uparrow}{f(-۵)}}{h}\Big)=f'(۲)+f'(-۵)=۴$$

گروه آموزشی ماز

۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر $f(\alpha)$ و $f'(\alpha)$ ریشه‌های معادله $۳x^۲+۷x+۲=۰$ باشند، آن‌گاه α طول کدام نقطه مشخص شده می‌تواند باشد؟

۱) A
۲) B
۳) C
۴) D



پاسخ: گزینه ۳　(آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

ضرب ریشه‌ها، مثبت و جمع آن‌ها منفی است، پس هر دو ریشه منفی هستند، یعنی $f(\alpha)$ و $f'(\alpha)$ هر دو منفی‌اند، پس فقط نقطه C می‌تواند جواب باشد.

گروه آموزشی ماز

۳- اگر $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۲m$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-\sqrt{۲x}}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-mh)-۳}{h}$ باشد، مقدار غیرصفر $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۲　۲) ۲　۳) -۴　۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳　(متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

حد سمت چپ $=-mf'(۲)$

حد سمت راست $=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(f(x)-۳)\overbrace{(x+\sqrt{۲x})}^{۴}}{(x-\sqrt{۲x})(x+\sqrt{۲x})}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x^۲-۲x}\times ۴=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}\times\frac{۴}{x}=f'(۲)\times\frac{۴}{۲}=۲f'(۲)$

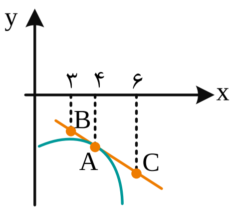
$\Rightarrow -mf'(۲)=۲f'(۲)\Rightarrow m=-۲$

$\Rightarrow f'(۲)=۲m=-۴$

گروه آموزشی ماز

۴- در شکل زیر، نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $x=۴$ رسم شده است. اگر $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f^۲(x)-۹}{x-۴}=۳$ باشد، مجموع عرض‌های نقاط B و C چقدر است؟

۱) -۶
۲) $-۶/۵$
۳) -۵
۴) $-۵/۵$



پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

یه درسنامهٔ کوچولو و مهم:

اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ عدد مشخص باشد، با توجه به صفر شدن مخرج، باید $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ یعنی صورت نیز برابر صفر شود که در این صورت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ حد مبهم از نوع $\dfrac{0}{0}$ می‌شود و جواب آن بعد از رفع ابهام، بدست می‌آید.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\text{عدد مشخص}\xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} g(x)=0}\lim_{x\to a} f(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\text{جواب حد بدست می‌آید}$$

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-6x}=2$ باشد، مقدار a و b را بدست آورید.

با توجه به این‌که مخرج صفر می‌شود، پس باید صورت هم صفر شود، بنابراین باید در تجزیه‌ی صورت $x-6$ داشته باشیم، از طرفی صورت کسر پس از تجزیه به صورت $(x-6)(x+k)$ خواهد بود که ابتدا به محاسبه‌ی k و بعد به محاسبه‌ی a و b می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2+ax+b}{x^2-6x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x+k)}{x(x-6)}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 6}\frac{x+k}{x}=\frac{6+k}{6}=2\Rightarrow k=6$$

پس صورت کسر موجود در حد یعنی x^2+ax+b باید به صورت $(x-6)(x+6)$ باشد، بنابراین:

$$x^2+ax+b=(x-6)(x+6)\Rightarrow x^2+ax+b=x^2-36\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-36\end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

اولاً حد داده شده وقتی وجود دارد که صورت کسر صفر شود، یعنی $f(4)=-3$ باشد. (چرا؟) ثانیاً:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f^2(x)-9}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)+3}{x-4}\times\frac{(f(x)-3)}{1}=f'(4)\times(-3-3)=-6f'(4)\Rightarrow -6f'(4)=3\Rightarrow f'(4)=-\frac{1}{2}$$

پس $f'(4)=-\dfrac{1}{2}$ است. معادلهٔ خط مماس در $x=4$ را می‌نویسیم.

$$y-\underset{\uparrow}{\overset{-3}{y_0}}=\underset{\uparrow}{\overset{-\frac{1}{2}}{m}}(x-\underset{\uparrow}{\overset{4}{x_0}})\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-1$$

نقاط B و C نیز بر این خط واقع هستند، بنابراین:

$$\Rightarrow\begin{cases}y(3)=-2/5\\ y(6)=-4\end{cases}\Rightarrow \text{جمع}=-6/5$$

گروه آموزشی ماز

۵- خط گذرنده از نقاط $A(0,a)$ و $B(-a,-a)$ در نقطه $x=1$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(1-2h)-f^2(1)}{h^2-h}=-4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\dfrac{5}{2}$

۲) $-\dfrac{3}{2}$

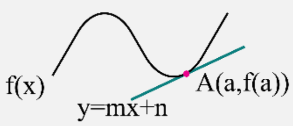
۳) ۲

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

نکته:

اگر خط $y=mx+n$ در نقطه‌ی به طول a واقع بر منحنی $f(x)$، بر آن مماس شود، شیب خط، همان مشتق تابع در نقطه‌ی به طول a است.



$$\Rightarrow \text{شیب}=f'(a)=m$$

پاسخ تشریحی:

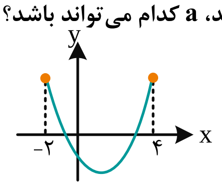
$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{a-(-a)}{0-(-a)}=2\xrightarrow[\text{از A و B}]{\text{معادله خط گذرنده}}y=2x+a$$

با توجه به فرض سوال، $f(1)=2+a$ و $f'(1)=2$ است.

$$\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۱-۲h)-f(۱)}{h}\times\frac{f(۱-۲h)+f(۱)}{h-۱}\right)=-۲f'(۱)\times\frac{۲f(۱)}{-۱}=۴\times۲\times(۲+a)$$

$$\Rightarrow ۸(۲+a)=-۴\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}$$

۶- تابع متناوب f با دورهٔ تناوب ۶ مفروض است. اگر نمودار f در بازهٔ $[-۲,۴]$ به صورت سهمی مقابل و $f'(۲)+f'(a)=۰$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟



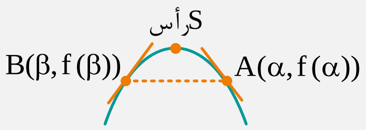
۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

نکته:

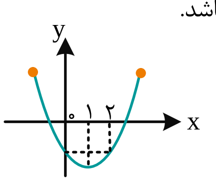
در تابع درجهٔ دوم، نقاط با عرض یکسان (متقارن نسبت به رأس سهمی) دارای شیب (مشتق) قرینه هستند.

$$f(\alpha)=f(\beta)\Rightarrow f'(\alpha)=-f'(\beta)$$



پاسخ تشریحی:

با توجه به تقارن سهمی نسبت به خط $x=۱$، مقدار a در بازهٔ $[-۲,۴]$ باید برابر صفر باشد. زیرا $f'(۲)=-f'(۰)$ است. در واقع شیب خطوط مماس در این دو نقطه قرینه یکدیگرند و چون $T=۶$ است، پس $f(۰)=f(۶k)$ که در آن k یک عدد صحیح است. بنابراین ۱۸ می‌تواند جواب باشد.



۷- اگر $f(x)=\dfrac{(x-۱)(x-۲)}{۲x+[\cos\pi x]}$ باشد، حاصل $f'(۱)-f'(۲)$ کدام است؟

۱) $-۱/۷۵$
۲) $-۱/۶$
۳) $-۱/۲$
۴) $-۱/۲۵$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

مشتق عامل صفرشونده:

اگر $f(x)=g(x)\times h(x)$ و $g(a)=۰$ و g در a مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$f'(a)=g'(a)\times\lim_{x\to a}h(x)$$

پاسخ تشریحی:

توجه داریم که $\lim_{x\to ۱}[\cos\pi x]=[-۱^+]=-۱$ و $\lim_{x\to ۲}[\cos\pi x]=[۱^-]=۰$ (چرا؟) بنابراین:

$$f'(۱)=(x-۱)'\times\lim_{x\to ۱}\frac{x-۲}{۲x+[\cos\pi x]}=۱\times\frac{-۱}{۲-۱}=-۱$$

$$f'(۲)=(x-۲)'\times\lim_{x\to ۲}\frac{x-۱}{۲x+[\cos\pi x]}=۱\times\frac{۱}{۴+۰}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین:

$$f'(۱)-f'(۲)=-۱-\frac{۱}{۴}=-۱/۲۵$$

۸- اگر $f'(۲)=-۳$ و $\lim_{h\to\infty}h\times\left(f\left(۲-\frac{۳}{h}\right)-a\right)=۶a$ موجود و متناهی باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۳
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

پاسخ تشریحی:

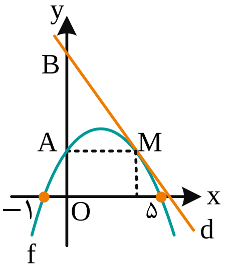
با روش تغییر متغیر داریم:

$$\frac{1}{h}=t \xrightarrow{h\to\infty} t\to 0 \Rightarrow \lim_{h\to\infty} h\times\left(f\left(2-\frac{3}{h}\right)-a\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f(2-3t)-a}{t} \underset{\text{که } f(2)=a \text{ باشد}}{\overset{\text{به شرطی حد وجود دارد}}{=}} -3f'(2) \Rightarrow -3f'(2)=6a \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

پس $f(2)=a=\frac{3}{2}$ است.

گروه آموزشی ماز

۹- در شکل مقابل، خط d بر سهمی f مماس است. طول پاره‌خط AB چند برابر طول پاره‌خط OA است؟



۱) ۳

۲) ۳/۶

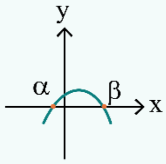
۳) ۳/۲

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

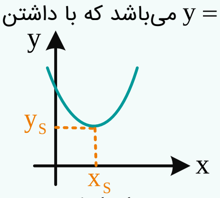
نوشتن معادله‌ی سهمی را یه مرور کنیم:

اگر سهمی محور xها را در نقاط به طول α و β قطع کند، معادله‌ی آن به صورت $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ می‌باشد که با داشتن یک نقطه‌ی کمکی (غیر از α و β) a بدست می‌آید.



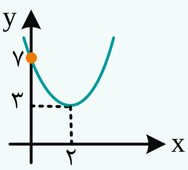
$$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

اگر $S(x_S, y_S)$ مختصات نقطه‌ی رأس سهمی باشد، معادله‌ی آن به صورت $y=a(x-x_S)^2+y_S$ می‌باشد که با داشتن یک نقطه‌ی کمکی (غیر از نقطه‌ی رأس) a به دست می‌آید.



اگر نقطه‌ی رأس یا نقاط برخورد سهمی با محور xها را نداشته باشیم، باید برای نوشتن معادله‌ی سهمی از رابطه‌ی $y=ax^2+bx+c$ استفاده کنیم که برای پیدا کردن a، b و c باید ۳ داده از سهمی را داشته باشیم.

مثال: معادله‌ی سهمی مقابل را بنویسید.



نقطه‌ی رأس سهمی یعنی S را داریم، بنابراین معادله‌ی سهمی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S(2,3)\Rightarrow y=a(x-2)^2+3 \xrightarrow[\text{می‌گذرد}\ (0,7)]{\text{سهمی از نقطه‌ی}} 7=a(0-2)^2+3 \Rightarrow 4a+3=7 \to a=1 \Rightarrow y=(x-2)^2+3$$

$$\Rightarrow y=x^2-4x+7$$

پاسخ تشریحی:

سهمی نسبت به خط $x=2$ تقارن دارد، پس $x_M=4$ است.

$$f(x)=a(x+1)(x-5)$$

$$m=f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{a(x^2-4x-5)+5a}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{a(x^2-4x)}{x-4}=4a$$

پس معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است. $(f(4)=-5a)$

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y+5a=4a(x-4)\Rightarrow y=4ax-21a$$

$$\begin{cases} y_A=-5a \\ y_B=-21a \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{OA}=\frac{-16a}{-5a}=3/2$$

۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۲-\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ باشد، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{x^۲}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۴-۴+\sin^۴ x}}{x^۲\underbrace{\sqrt{۲+\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}_{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{۲x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

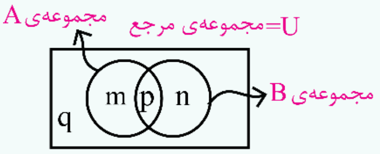
۱۱- اجتماع ورزشکاران در یک کلاس با ۲ رشته ورزشی ۳۶ نفر است. تعداد کسانی که فقط ورزش A را انجام می‌دهند دو برابر تعداد کسانی است که هر ۲ رشته ورزشی را انجام می‌دهند. اگر ۲۰ نفر ورزش B را انجام دهند، در این حالت، چند نفر فقط در یک رشته فعالیت دارند؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

خاطرات مجموعه‌ها در ریاضی دهم:

فرض کنید حروف نوشته شده در هر قسمت از شکل مقابل، تعداد عضوهای همان مجموعه را نشان می‌دهد.



اگر تعداد عضوهای مجموعه‌ی مرجع را S بگیریم، داریم:

$n(A)=m+P$ $n(B)=P+n$ $n(A')=S-(m+P)$ $n(B')=S-(n+P)$

$n(A\cap B)=P$ $n(A\cup B)=m+P+n$ $n(A-B)=m$ $n(B-A)=n$

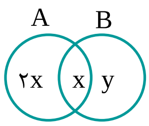
$n(A\Delta B)=m+n$

$A\Delta B$ مجموعه‌ای حاوی عضوهای ۲ مجموعه‌ی A و B به غیر از عضوهای مشترک آن‌هاست یعنی:

$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

پاسخ تشریحی:

اگر از نمودار ون کمک بگیریم، آن‌گاه داریم:



$n(A\cup B)=۳۶$

$\left.\begin{array}{l}x+y=۲۰\\ ۳x+y=۳۶\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{۲ معادله ۲ مجهول}]{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}x=۸\\ y=۱۲\end{cases}$

تعداد کسانی که فقط در یک رشته فعالیت دارند $=۲x+y=۲۸$

گروه آموزشی ماز

۱۲- a_n یک الگوی خطی و $b_n=na_n$ است به طوری که $b_۲=a_۶$ و $b_{۱۰}=۲۴۰$ می‌باشد. مقدار $\sqrt{b_۴-a_۴}$ چه عددی است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ تشریحی:

$a_n=an+b\Rightarrow b_n=an^۲+bn$

$b_۲=a_۶\Rightarrow ۴a+۲b=۶a+b\Rightarrow ۲a=b$

$b_{۱۰}=۱۰۰a+۱۰b=۲۴۰\Rightarrow ۱۰۰a+۲۰a=۲۴۰\Rightarrow ۱۲۰a=۲۴۰\Rightarrow a=۲\Rightarrow b=۴\Rightarrow b_n=۲n^۲+۴n$

$\left.\begin{array}{l}b_n=۲n^۲+۴n\\ a_n=۲n+۴\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{b_۴-a_۴}=\sqrt{۴۸-۱۲}=۶$

۱۳- دنباله a_n با تعریف $a_n=\left[\sqrt{n^2-2n+8}\right]$ را در نظر می‌گیریم. جمع چهل جمله ابتدایی آن کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷۸۵ ۲) ۷۸۱ ۳) ۷۷۴ ۴) ۷۸۳

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ ترکیبی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

بریم سراغ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

جزء صحیح:

اگر n عددی صحیح و x عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

$$n\le x<n+1\leftrightarrow[x]=n$$

پاسخ تشریحی:

برای هر مقدار n رابطهٔ $n^2-2n+1<n^2-2n+8$ برقرار است و برای $n>4$ می‌توان گفت:

$$n>4\xrightarrow{\times(-2)}-2n<-8\xrightarrow{+n^2}n^2-2n<n^2-8\Rightarrow n^2-2n+8<n^2$$

بنابراین برای $n>4$:

$$n^2-2n+1<n^2-2n+8<n^2\xrightarrow{\text{جذر}}n-1<\sqrt{n^2-2n+8}<n\Rightarrow\left[\sqrt{n^2-2n+8}\right]=n-1$$

پس برای جملات پنجم و بعد آن یک دنباله خطی و به صورت $a_n=n-1$ خواهد بود، بنابراین ابتدا چهار جملهٔ اول را جداگانه محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$a_1+a_2+...+a_{40}=a_1+a_2+a_3+a_4+4+5+...+39$$

$$\Rightarrow S_{40}=\left[\sqrt{7}\right]+\left[\sqrt{8}\right]+\left[\sqrt{11}\right]+\left[\sqrt{16}\right]+\frac{36}{2}(4+39)$$

$$S_{40}=2+2+3+4+774=785$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- سه جمله اول یک دنباله هندسی را به ترتیب در اعداد ۴، ۸ و ۱۶ ضرب کرده‌ایم و یک دنباله حسابی به دست آمده است. جمع هشت جمله ابتدایی دنباله هندسی چند برابر جمع سه جمله اول آن است؟

۱) $\frac{127}{63}$ ۲) $\frac{255}{224}$ ۳) $\frac{127}{7}$ ۴) $\frac{255}{127}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ ۱۱۰۱)

شرط واجب دنبالهٔ حسابی:

اگر a، b و c دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، آن‌گاه:

$$a+c=2b$$

بزن بریم سراغ مجموع جملات دنباله‌ی هندسی:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\quad(\text{q قدرنسبت دنباله هندسی است})$$

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم جملات ابتدایی دنباله هندسی (از چپ به راست) a,ar,ar^2 باشند، پس $4a,8ar,16ar^2$ جملات دنباله حسابی هستند، بنابراین:

$$2(8ar)=4a+16ar^2$$

$$\Rightarrow16ar=4a+16ar^2\Rightarrow4r=1+4r^2\Rightarrow4r^2-4r+1=0\Rightarrow r=\frac{1}{2}=\text{قدرنسبت دنباله هندسی}$$

$$\Rightarrow\frac{S_8}{S_3}=\frac{a\dfrac{1-(\frac{1}{2})^8}{1-\frac{1}{2}}}{a\dfrac{1-(\frac{1}{2})^3}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{1-\frac{1}{256}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{\frac{255}{256}}{\frac{7}{8}}=\frac{255}{7\times32}\Rightarrow\frac{S_8}{S_3}=\frac{255}{224}$$

۱۵- اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r را دو برابر کنیم، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت. مقدار $r+2d$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

خوبه که نکات زیر رو توی ذهنمون داشته باشیم

نکتهٔ۱:

اگر جملات یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت r را در عددی مانند m ضرب کنیم، جملهٔ اول a_1m و قدرنسبت همان r می‌شود.

نکتهٔ۲:

دنبالهٔ ثابت $a_n = k$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت صفر و یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۱ می‌باشد.

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم a_n جملات دنباله هندسی با قدرنسبت r باشند، آن‌گاه اگر جملات آن را دو برابر کنیم، مجدد یک دنباله هندسی با قدرنسبت r خواهیم داشت، زیرا:

$$a_n = a_1r^{n-1} \Rightarrow a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a_1, 2a_1r, 2a_1r^2, \ldots$$

چون جملات دنباله جدید تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d می‌دهند، پس:

$$2a_1 + 2a_1r^2 = 2\times(2a_1r) \Rightarrow 1+r^2 = 2r \Rightarrow r = 1$$

$$r = 1 \Rightarrow \text{جملات دنباله هندسی}: 2a_1, 2a_1, 2a_1, \ldots \Rightarrow d = 0$$

یعنی قدرنسبت دنباله هندسی (r) برابر ۱ و قدرنسبت دنباله حسابی (d) برابر صفر است. پس: $\Rightarrow r+2d = 1$

گروه آموزشی ماز

۱۶- بین دو عدد ۲− و ۱۰ حداقل چند واسطه حسابی درج کنیم تا جمع واسطه‌ها از ۶۰ بزرگ‌تر باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته:

در یک دنباله حسابی با n جمله مجموع جملات $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ است.

پاسخ تشریحی:

اگر بین ۲− و ۱۰، n واسطه حسابی درج کنیم، آن‌گاه با دو جمله ۲− و ۱۰ کلاً $n+2$ جمله خواهیم داشت، پس جمع تمام جملات باید از $10+(-2)+60$ یعنی ۶۸ بیشتر شود.

$$S_{\text{تمام جملات}} = \frac{n+2}{2}(10-2) = 4(n+2) > 68 \Rightarrow n+2 > 17 \Rightarrow n > 15 \Rightarrow n \geq 16$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- ریشهٔ پنجم عدد مثبت a، ۱۶ برابر عدد a با توان $\frac{11}{5}$ است. حاصل $\sqrt{4a+8}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

نکته:

اگر n عددی فرد باشد، ریشه‌ی nاُم عدد a، همان $\sqrt[n]{a}$ و اگر n عددی زوج باشد، ریشه‌های nاُم عدد مثبت a، همان $\pm\sqrt[n]{a}$ هستند.

پاسخ تشریحی:

$$\sqrt[5]{a} = 16a^{\frac{11}{5}} \Rightarrow a = 2^{20}a^{11} \Rightarrow a^{-10} = 2^{20} \xrightarrow{\text{معکوس}} a^{10} = 2^{-20} \xrightarrow{\sqrt[10]{\ }} a = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow \sqrt{4a+8} = 3$$

۱۸- اگر $A=۲-\sqrt{۳}$ ، $B=۲+\sqrt{۳}$ و $M=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{۱}{۱+B^۳}}$ باشد، مقدار $M+\frac{۱}{M}$ چه عددی است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

اولاً دقت کنید:
$$AB=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=۱$$
$$\Rightarrow A^۳B^۳=۱$$

پس:
$$M^۳=\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{۱}{۱+B^۳}=\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{A^۳}}$$
$$\Rightarrow M^۳=\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{A^۳}{۱+A^۳}=۱\Rightarrow M^۳=۱\Rightarrow M=۱$$

پس:
$$M+\frac{۱}{M}=۲$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- هرگاه $A=\frac{۳\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۴}+\frac{۸+۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}$ باشد، مقدار $(A-۱)^۲$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) $۴-۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۴+۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات (همون چاق و لاغر شما):
$$\underbrace{(a\pm b)}_{\text{لاغر}}\underbrace{(a^۲\mp ab+b^۲)}_{\text{چاق}}=a^۳\pm b^۳$$

یه استراتژی خوب: در سؤالاتی که چند کسر جمع و تفریق می‌شوند و در صورت و مخرج هر کدام از کسرها چند عدد رادیکالی نوشته شده در صورت امکان یا هر کسر را جداگانه ساده کنیم یا مخرج کسرها را گویا کنیم و یا مخرج مشترک بگیریم.

پاسخ تشریحی:

کسرها را یکی‌یکی ساده می‌کنیم:
$$\frac{۸+۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۲(۴+۲\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})^۲}{۱+\sqrt{۳}}=۲(۱+\sqrt{۳})$$
$$\frac{۳\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۴}=\frac{(\sqrt{۳})^۳+۱^۳}{\sqrt{۳}-۴}=\frac{(\sqrt{۳}+۱)(۳+۱-\sqrt{۳})}{(\sqrt{۳}-۴)}=\frac{(\sqrt{۳}+۱)(۴-\sqrt{۳})}{(\sqrt{۳}-۴)}=\frac{(\sqrt{۳}+۱)\times\cancel{(۴-\sqrt{۳})}}{-\cancel{(۴-\sqrt{۳})}}=-\sqrt{۳}-۱$$

پس:
$$A=(۲+۲\sqrt{۳})+(-\sqrt{۳}-۱)=\sqrt{۳}+۱$$
$$\Rightarrow A-۱=\sqrt{۳}\Rightarrow (A-۱)^۲=۳$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر $A=۲-\sqrt{۳}$ ، $B=\sqrt[۳]{۱۶\sqrt[۳]{۴\sqrt{۸}}}$ و $\sqrt{A}B^k=۲-۲\sqrt{۳}$ باشد، مقدار k چه عددی است؟

۱) $\frac{۳۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۱}$ ۳) $\frac{۹}{۳۱}$ ۴) $\frac{۲۷}{۳۱}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

نکته:

اگر $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد:
$$\sqrt[n]{a}^{\,m}=a^{\frac{m}{n}}$$

یه حرکت ساده:
$$\sqrt[m]{a\times\sqrt[n]{b\times\sqrt[p]{c}}}=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m\times n]{b}\times\sqrt[m\times n\times p]{c}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا B را ساده می‌کنیم:

$$B=\sqrt[3]{16}\times\sqrt[9]{4}\times\sqrt[18]{8}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{2}{9}}\times 2^{\frac{3}{18}}\Rightarrow B=2^{\frac{31}{18}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{AB^{k}}=2-2\sqrt{3}\xrightarrow{\text{توان } 2}AB^{2k}=4(1-\sqrt{3})^{2}$$

$$AB^{2k}=4(4-2\sqrt{3})=8\underbrace{(2-\sqrt{3})}_{A}\Rightarrow AB^{2k}=8A\Rightarrow B^{2k}=2^{3}\Rightarrow B^{2}=2^{\frac{31}{9}}\xrightarrow{\text{توان } k}(B^{2})^{k}=\left(2^{\frac{31}{9}}\right)^{k}=2^{3}$$

$$2^{\frac{31k}{9}}=2^{3}\Rightarrow \frac{31k}{9}=3\Rightarrow k=\frac{27}{31}$$

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: ساده ❋ حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۵)**

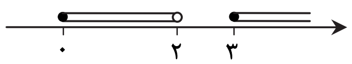
نکته: حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ وجود دارد. اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نکته: اگر تابع f در یک همسایگی راست (چپ) نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، می‌گوییم حد راست (چپ) تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر عدد L_1 (L_2) است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_1 (L_2) نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x از سمت راست (چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

ابتدا دامنهٔ تعریف $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{صورت}: x\ge 0 \quad (1)\\ \text{مخرج}: [x]-2\ne 0 \Rightarrow [x]\ne 2 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-[2,3) \quad (2)\end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} [0,2)\cup[3,+\infty)$$

بنابراین دامنهٔ این تابع به‌صورت زیر است:



طبق نکات و تعریف همسایگی داریم:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$ تعریف نمی‌شود

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$ تعریف نمی‌شود

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$ تعریف نمی‌شود

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=$ تعریف می‌شود

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: ساده ❋ حسابان ۱ (درس‌های ۲ و ۳، فصل ۵)**

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ و $L_2\ne 0$، آنگاه داریم: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

می‌دانیم وقتی $x\to 1^+$ عبارت $4-x$ به‌سمت ۳ میل می‌کند. اما از آنجا که $x\to 1^+$ یعنی $x>1$ پس $4-x<3$ یعنی عبارت $4-x$ با مقادیر کمتر از ۳ به‌سمت ۳ میل می‌کند. پس برای یافتن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(4-x)$ باید روی نمودار تابع f از سمت چپ به ۳ نزدیک شویم، پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(4-x)=f(3^-)=-1$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(4-x)}{x+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}=-0/5$$

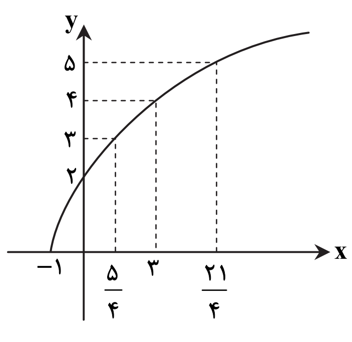
۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❋ حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)**

فرض کنید $x=\frac{\pi}{2}+t$ به‌طوری که وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^-$، آنگاه $t\to 0^-$؛ داریم:

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{\sqrt{1+\sin(\frac{3\pi}{2}+3t)}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t}{\sqrt{1-\cos 3t}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t}{\sqrt{2\sin^2\frac{3t}{2}}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t}{-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-t}{-\sqrt{2}(\frac{3}{2}t)}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❋ حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)**

در نقاطی که حاصل عبارت $y=2\sqrt{x+1}$ برابر عدد صحیح است، تابع f ناپیوسته است. نمودار این تابع به‌صورت روبه‌رو است. به‌ازای $y=3$، $y=4$ و $y=5$، سه نقطهٔ ابتدایی ناپیوسته تابع با طول‌های مثبت به‌دست می‌آید. داریم:



$$\begin{cases} 2\sqrt{x_1+1}=3 \Rightarrow x_1=\frac{5}{4}\\ 2\sqrt{x_2+1}=4 \Rightarrow x_2=3 \\ 2\sqrt{x_3+1}=5 \Rightarrow x_3=\frac{21}{4}\end{cases} \Rightarrow \text{جمع}=9/5$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c پیوسته باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

نکته: اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، در تمامی نقاط پیوسته است.

می‌خواهیم عرض نقطه‌ای به‌طول ۱ را پیدا کنیم که با اضافه شدن به تابع f آن را در $x=1$ پیوسته می‌کند، پس a را باید برابر $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ تعریف کنیم:

$$a=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^2+x-4)(x^2+3x-4)}{(x^2-2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+4)(x-1)(x+4)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+4)(x+4)}{1}=7\times 5=35$$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

به‌ازای $x=1$ مخرج کسر برابر صفر است، پس باید صورت کسر نیز برابر صفر باشد:

$$\sqrt{ax+b}-2=0 \xrightarrow{x=1} \sqrt{a+b}-2=0 \Rightarrow a+b=4 \quad (*)$$

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج صورت داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{ax+b}-2)(\sqrt{ax+b}+2)}{(x-1)\underbrace{(x+4)}_{5}\underbrace{(\sqrt{ax+b}+2)}_{4}}=\lim_{x\to 1}\frac{ax+b-4}{20(x-1)}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{20(x-1)}=\frac{a}{20}=\frac{1}{a-1}\Rightarrow a^2-a-20=0$$

$$\begin{cases} a=5 \Rightarrow b=-1 \\ a=-4 \Rightarrow b=8 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای b برابر ۷ است.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

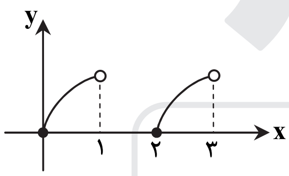
نکته: تابع f در $x=a$ پیوسته است. اگر و تنها اگر f در $x=a$، هم از چپ و هم از راست پیوسته باشد.

راه‌حل اول: کافی است دو نقطه با طول عدد صحیح زوج و فرد را آزمایش کنیم. به‌طور مثال $x=0$ و $x=1$، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|=\lim_{x\to 0^-}(m+nx+[x])\Rightarrow 0=m-1\Rightarrow m=1 \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(m+nx+[x])=\lim_{x\to 1^-}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|\Rightarrow m+n+1=1\xrightarrow{(*)} n=-1$$

راه‌حل دوم: نمودار ضابطهٔ اول به‌صورت روبه‌رو است:



پس به‌عنوان مثال ضابطهٔ دوم در بازهٔ $[1,2)$ باید به‌صورت خط $y=-x+2$ باشد، پس داریم:

$$x\in[1,2)\Rightarrow m+nx+[x]=m+nx+1=-x+2\Rightarrow \begin{cases} n=-1 \\ m=1 \end{cases}$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

نکته: $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

نکته: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

ابتدا صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$\tan(5x+\frac{\pi}{6})-\tan(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sin(5x+\frac{\pi}{6})}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})}-\frac{\sin(2x+\frac{\pi}{6})}{\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sin(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})-\sin(2x+\frac{\pi}{6})\cos(5x+\frac{\pi}{6})}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}$$

$$=\frac{\sin((5x+\frac{\pi}{6})-(2x+\frac{\pi}{6}))}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sin 3x}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x\times\frac{1}{3}\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{3}\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=\frac{3}{\cos\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۴)

نکته: اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، داریم: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

با استفاده از تعریف مشتق، مقدار $f'(3)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{(x^2-3x)\cos\pi x}{\sqrt{x^2-3x+4}}-0}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x\cos\pi x}{\sqrt{x^2-3x+4}}=\frac{3\times\cos 3\pi}{\sqrt{9-9+4}}=-\frac{3}{2}$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۴)

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ برابر $f'(a)$ است.

مطابق نکته و اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} m=f'(1)=f'(3)\\ -m=f'(2)=f'(4)\end{cases}$$

بنابراین:

$$f'(1)+f'(3)=18+f'(2)\ \Rightarrow\ m+m=18-m\ \Rightarrow\ m=6$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آنگاه در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

ابتدا ضابطهٔ تابع را در همسایگی راست و چپ نقطه‌ای به طول ۴ بدون جزء صحیح بازنویسی می‌کنیم:

$$4<x<5\ \Rightarrow\ -5<-x<-4\ \Rightarrow\ [-x]=-5$$
$$3<x<4\ \Rightarrow\ -4<-x<-3\ \Rightarrow\ [-x]=-4$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5 & 4<x<5\\ 12 & x=4\\ x^2-4 & 3<x<4\end{cases}$$

تابع f در $x=4$ پیوستگی راست ندارد ولی پیوستگی چپ دارد؛ زیرا:

$$\lim_{x\to 4^+}f(x)=\lim_{x\to 4^+}(x^2-5)=16-5=11$$
$$\lim_{x\to 4^-}f(x)=\lim_{x\to 4^-}(x^2-4)=16-4=12$$

پس f در $x=4$ مشتق راست ندارد و $f'_+(4)$ موجود نیست، امّا $f'_-(4)$ وجود دارد:

$$3<x<4\ \Rightarrow\ f(x)=x^2-4\ \Rightarrow\ f'(x)=2x\ \Rightarrow\ f'_-(4)=8$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty\end{cases}$$

$x=0$ ریشهٔ مخرج کسر تمامی توابع است، پس به بررسی حد راست و چپ هر کدام از گزینه‌ها وقتی $x\to 0^+$ یا $x\to 0^-$ می‌پردازیم:

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[-x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{x}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[-x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{0}{x}=0$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{0}{x}=0$

۴) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[-x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{x}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[-x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x}=+\infty$

بنابراین تابع h در گزینهٔ ۳ مجانب قائم ندارد چون حد آن در صفر متناهی است. سایر توابع در صفر حد راست یا چپ نامتناهی دارند.

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❋ حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۳)**

نکته: به طور کلی حد هر چند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است، یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

ابتدا حد تابع را وقتی $x\to+\infty$، محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+4x+5})=\lim_{x\to+\infty}(x+|x|)=\lim_{x\to+\infty}(x+x)=+\infty$$

برای یافتن حد تابع وقتی $x\to-\infty$، ضابطهٔ تابع را در مزدوج آن ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+4x+5})\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4x+5}}{x-\sqrt{x^2+4x+5}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+4x+5)}{x-\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x-5}{x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x-5}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{2x}=-2$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$، نمودار گزینهٔ ۲ می‌تواند مربوط به تابع f باشد.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ❋ حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۴)**

نکته: اگر f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

۱) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

۲) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{h}=mf'(a)$

ابتدا $f'(2)$ را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که شرط وجود حد آن است که $f(2)=1$ باشد:

$$\lim_{x\to2}\frac{(f(x)-1)\overbrace{(f^2(x)+f(x)+1)}^{3}}{(x-2)\underbrace{(x+2)}_{4}}=\lim_{x\to2}\frac{3}{4}\,\frac{f(x)-1}{x-2}=\frac{3}{4}f'(2)=\frac{1}{2}\Rightarrow f'(2)=\frac{2}{3}$$

برای محاسبهٔ حد دوم، $x-1$ را برابر h در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(3-x)-f(1+x)}{x-1}=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2+h)}{h}\ \overset{\text{صورت بعلاوه و منهای } f(2)}{=\!=\!=}\ \lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)-(f(2+h)-f(2))}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-f'(2)-f'(2)=-2f'(2)=-2\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار ❋ حسابان ۲ (درس‌های ۱ و ۲، فصل ۴)**

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در $x=a$ در صورت وجود برابر مشتق تابع $y=f(x)$ در $x=a$ است.

نکته: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شرط لازم برای وجود مشتق چپ و راست، آن است که f در $x=1$ پیوسته باشد.

چون $2x-[x]$ در $x=1$ ناپیوسته است، لازم است که صورت کسر در $x=1$ برابر صفر باشد:

$$x^2+ax+b=0\xrightarrow{x=1}1+a+b=0\Rightarrow b=-1-a\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+ax-1-a}{2x-[x]}=\frac{(x-1)(x+1+a)}{2x-[x]}$$

اکنون شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{(x-1)(x+1+a)}{2x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1+a}{2x-1}=\frac{2+a}{1}=2+a$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{(x-1)(x+1+a)}{2x}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1+a}{2x}=\frac{2+a}{2}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow\left|\frac{2+a}{2}-\frac{2+a}{1}\right|=3\Rightarrow|a+2|=6\Rightarrow a=4\ \text{یا}\ -8$$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار ❋ حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۴)**

نکته: حاصل حد زیر در صورت وجود برابر مشتق تابع f در $x=a$ است:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته: $\lim_{u\to ۰}\frac{\operatorname{Sin} u}{u}=۱$

برای محاسبهٔ $f'(۰)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{\operatorname{Cos} ۲x}}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{\operatorname{Cos} ۲x}}}{x}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{\operatorname{Cos} ۲x}}}{\sqrt{۱+\sqrt{\operatorname{Cos} ۲x}}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\operatorname{Cos} ۲x}}{x\sqrt{۱+\sqrt{\operatorname{Cos} ۲x}}}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{\operatorname{Cos} ۲x}}}}_{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\operatorname{Cos} ۲x}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\operatorname{Cos} ۲x}}{\sqrt{۲}x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲\operatorname{Sin}^۲ x}}{\sqrt{۲}x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲}\,|\operatorname{Sin} x|}{\sqrt{۲}x}$$

بنابراین برای مشتق چپ و راست داریم:

$$\begin{cases} f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|\operatorname{Sin} x|}{x}=۱ \\ f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|\operatorname{Sin} x|}{x}=-۱ \end{cases}\Rightarrow \text{اختلاف}=۲$$

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار ❋ حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)**

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \end{cases}$$

نکته:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-}=-\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty$$

حد تابع در هر دو طرف $x=a$ برابر $-\infty$ است، پس $x=a$ ریشهٔ مضاعف مخرج است:

$$\operatorname{Cos}^۲ x+\operatorname{Cos} x=۰\Rightarrow \operatorname{Cos} x(۱+\operatorname{Cos} x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Cos} x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\ \text{ریشه ساده} \\ \operatorname{Cos} x=-۱\Rightarrow x=\pi\ \text{ریشه مضاعف}\end{cases}$$

در اطراف $x=\pi$، علامت $۱+\operatorname{Cos} x$ مثبت است، پس $x=\pi$ ریشهٔ مضاعف مخرج است و داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۳x+b}{\operatorname{Cos} x(۱+\operatorname{Cos} x)}=\frac{۳\pi+b}{-۱\times ۰^+}=-\infty\Rightarrow ۳\pi+b>۰\Rightarrow b>-۳\pi\Rightarrow b>-۹/۴۲\Rightarrow [b]\geq -۱۰$$

حداقل مقدار $[b]$ برابر ۱۰- است.

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)**

نکته: خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

نکته:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

ضابطه تابع f به‌صورت $f(x) = -(x-2)^3$ است. چون $f(2) = 0$ و $f(0) = 8$، پس $f^{-1}(8) = 0$ است و $x = 8$ ریشهٔ هر دو مخرج است.

$$f(x) = y = -(x-2)^3 \Rightarrow x - 2 = -\sqrt[3]{y} \Rightarrow x = 2 - \sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$$

$$y = \frac{1}{f(x-6)} - \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{-1}{(x-8)^3} - \frac{1}{2-\sqrt[3]{x}} = \frac{-1}{(x-8)^3} - \frac{4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{8 - x} = \frac{-1 + (x-8)^2(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(x-8)^3}$$

$$\lim_{x\to 8^\pm} y = \frac{-1}{0^\pm} = \mp\infty$$

سمت راست $x = 8$ حد تابع برابر $-\infty$ و سمت چپ $x = 8$ حد تابع برابر $+\infty$ است.

حسابان دوازدهم: صفحه‌های ۸۴ تا ۱۱۰

تست و پاسخ ۱

تقعر تابع رو به پایین است.

f یک چندجمله‌ای از درجه‌دوم با شرط $f''(x)<0$ است، به طوری که $f'of(x)=8x^2-12x-3$. مقدار $fof'(2)$ چه عددی است؟

۱) $-63/5$ ۲) $-66/5$ ۳) $-53/5$ ۴) $-51/5$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خلوت حل هشتی پیشه تابع درجه‌دوم f را به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ در نظر بگیرید و با مشتق‌گیری، ضرایب را به کمک معادلهٔ داده‌شده به دست آورید.

گام اول: تابع f یک چندجمله‌ای از درجه‌دوم است. $f(x)$ را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم: $f(x)=ax^2+bx+c$

مشتق تابع f، یک چندجمله‌ای درجه‌یک است: $f'(x)=2ax+b$

گام دوم: از طرفی گفته شده که $f''(x)<0$ است؛ پس: $f''(x)=2a<0 \Rightarrow a<0$

گام سوم: تابع $f'of(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f'of(x)=f'(f(x))=f'(ax^2+bx+c)=2a(ax^2+bx+c)+b$$
$$=2a^2x^2+2abx+(2ac+b)=8x^2-12x-3$$

حالا ضرایب توان‌های x را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$2a^2=8 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \xrightarrow[\text{از گام دوم}]{a<0} a=-2 \ (*)$$

$$2ab=-12 \xrightarrow{(*)} b=\frac{-12}{2(-2)}=3 \ (**)$$

$$2ac+b=-3 \xrightarrow{(*)\text{ و }(**)} c=\frac{-3-3}{2(-2)}=\frac{3}{2}$$

گام چهارم: پس تابع به صورت $f(x)=-2x^2+3x+\frac{3}{2}$ می‌شود.

گام پنجم: حاصل $fof'(2)$ را می‌یابیم:

$$f'(2)=2a\times 2+b=4a+b=-8+3=-5$$
$$fof'(2)=f(-5)=-2\times 25-15+\frac{3}{2}=-65+1/5=-63/5$$

تست و پاسخ ۲

f تابعی مشتق‌پذیر است، به طوری که $g(x)=f(4\cos^2 x+3\tan x)$. اگر $g'(\frac{3\pi}{4})=3$، آن‌گاه مقدار $f'(-1)$ چه عددی است؟

۱) $-0/6$ ۲) $0/6$ ۳) $0/3$ ۴) $-0/3$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه مشتق تابع مرکب $f(u)$

مشتق تابع $f(u)$ را به صورت $(f(u))'$ می‌نویسیم که برابر است با:

از عبارت یا تابع داخلی مشتق می‌گیریم.

$(f(u))'=u'f'(u) \rightarrow f'$(همان عبارت یا تابع)

نکته اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، fog مشتق‌پذیر است و داریم: $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

گام اول: مشتق تابع g را به کمک فرمول مشتق تابع مرکب، می‌یابیم:

$$g(x)=f(4\cos^2 x+3\tan x)$$
$$g'(x)=(-8\cos x\sin x+3+3\tan^2 x)f'(4\cos^2 x+3\tan x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} g'(\frac{3\pi}{4})=(-8\cos(\frac{3\pi}{4})\sin(\frac{3\pi}{4})+3+3\tan^2(\frac{3\pi}{4}))f'(4\cos^2(\frac{3\pi}{4})+3\tan(\frac{3\pi}{4}))$$

$$=(-8\times(\frac{-\sqrt{2}}{2})\times(\frac{\sqrt{2}}{2})+3+3)f'(4(\frac{-\sqrt{2}}{2})^2+3(-1))=10f'(-1)=3$$

تست و پاسخ ۳

با فرض آن‌که $f(x)=2x^3-3x^2+4x-6$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f'(x)$ بر $f''(x)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{5}{2}$　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) $-\frac{9}{2}$　　۴) $-\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره سؤال ساده‌ای است. اولین قدم در فصل مشتق، تسلط بر روی فرمول‌های مشتق است. اگر در حل این سؤال با مشکل مواجه هستید، پیشنهاد می‌کنم تمام تمرین‌های کتاب درسی در موضوع به دست آوردن مشتق تابع را حل کنید.

درس‌نامه قوانین مشتق‌گیری

تابع	مشتق تابع	توضیح فارسی	مثال
$y=c$	$y'=0$	مشتق عدد ثابت صفر است.	$y=5 \Rightarrow y'=0$
$y=ax$	$y'=a$	مشتق ax همان ضریب x است.	$y=3x \Rightarrow y'=3$
$y=ax^n$	$y'=nax^{n-1}$	—	$y=3x^5 \Rightarrow y'=15x^4$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	—	—
$y=\sqrt[3]{x}$	$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	—	—
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	—	—
$y=f\pm g$	$y'=f'\pm g'$	در جمع یا تفریق عبارت‌ها، تک تک مشتق می‌گیریم.	$y=x^3+\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ $\Rightarrow y'=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$
$y=af$	$y'=af'$	در ضرب عدد در تابع، عدد را قرار داده و از f مشتق می‌گیریم.	$y=5\sqrt{x} \Rightarrow y'=5\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{x}}$
$y=fg$	$y'=f'g+g'f$	$y'=(\text{مشتق اولی})(\text{دومی})+(\text{مشتق دومی})(\text{اولی})$	$y=(x^2+5)\sqrt{x}$ $\Rightarrow y'=2x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+5)$
$y=\frac{f}{g}$	$y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$	$y'=\frac{(\text{مشتق صورت})(\text{مخرج})-(\text{مشتق مخرج})(\text{صورت})}{(\text{مخرج})^2}$	$y=\frac{\frac{2}{x}-1}{x^2+x}$ $\Rightarrow y'=\frac{(\frac{-2}{x^2})(x^2+x)-(2x+1)(\frac{2}{x}-1)}{(x^2+x)^2}$
$y=u^n$	$y'=nu^{n-1}u'$	u یک عبارت برحسب x است.	$y=(x^2+x)^5$ $\Rightarrow y'=\underset{n}{5}\underset{u^{n-1}}{(x^2+x)^4}\underset{u'}{(2x+1)}$
$y=\sqrt[n]{u}=u^{\frac{1}{n}}$	$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}u'$	—	$y=\sqrt[3]{4x+5} \Rightarrow y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}}$
$y=\frac{1}{u}$	$y'=\frac{-u'}{u^2}$	—	$y=\frac{4}{x+5} \Rightarrow y'=\frac{-4}{(x+5)^2}$

گام اول: از ضابطهٔ f داده‌شده، $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x^3-3x^2+4x-6 \qquad f'(x)=6x^2-6x+4 \qquad f''(x)=12x-6$$

گام دوم: برای این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم $f'(x)$ بر $f''(x)$ را بیابیم، ریشهٔ معادلهٔ $f''(x)=0$ را می‌یابیم و آن را در f' جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f''(x)=12x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{باقی مانده}=R=f'(\frac{1}{2})=6(\frac{1}{2})^2-6\times\frac{1}{2}+4=\frac{3}{2}-3+4=\frac{5}{2}$$

تست و پاسخ ۴

هرگاه $g(0)=2$ و $f'(0)=4$، به طوری که $f(2x)=8x-2g^3(3x)$ باشد، مقدار $\frac{g''(0)}{f''(0)}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{54}$ ۲) $-\frac{1}{54}$ ۳) $-\frac{1}{216}$ ۴) $\frac{1}{216}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره: در به دست آوردن مقادیر مشتق، حواستان به عوامل صفرکننده باشد. گاهی به دست آوردن مشتق یک تابع سخت است، اما با عامل صفرکننده، دیگر نیازی به محاسبهٔ مشتق تابع نداریم.

درس‌نامه: مشتق عامل صفرشونده

اگر بخواهیم مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-a)g(x)$ را در $x=a$ پیدا کنیم، بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم. زیرا $x=a$، عامل صفرکنندهٔ تابع است. داریم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}g(x)$$

بدیهی است که اگر تابع g در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f'(a)=g(a)$؛ یعنی وقتی $g(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد، می‌توانیم فقط از عامل صفرشونده، مشتق بگیریم و آن را در بقیهٔ عبارت‌ها، ضرب کنیم و در نهایت به جای x، مقدار a را قرار بدهیم.

نکته ۱) اگر عامل صفرشونده، بیش از یکی باشد، مشتق در آن نقطه برابر با صفر می‌شود، مثلاً برای $y=(x^2-5x)|x-5|$، در $x=5$، مشتق آن برابر صفر است.

۲) نکتهٔ مشتق عامل صفرشونده، فقط وقتی استفاده می‌شود که عبارت‌ها در هم ضرب و یا بر هم تقسیم شده‌اند.

گام اول: از عبارت $f(2x)=8x-2g^3(3x)$ مشتق می‌گیریم:

$$2f'(2x)=8-6g^2(3x)\times 3g'(3x) \Rightarrow f'(2x)=4-9g^2(3x)g'(3x) \quad (I)$$

گام دوم: در (I) مقدار $x=0$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(0)=4-9g^2(0)g'(0)=4 \Rightarrow g^2(0)g'(0)=0 \xrightarrow{g(0)=2} g'(0)=0$$

نتیجه می‌گیریم که $g'(x)$ به ازای $x=0$ عامل صفرکننده است. در مشتق دوم این را لحاظ می‌کنیم، یعنی فقط از عامل صفرکننده مشتق می‌گیریم و بقیهٔ عبارت باقی‌مانده را در نتیجهٔ آن ضرب می‌کنیم.

گام سوم: از عبارت (I) مشتق دوم می‌گیریم. با فرض $g'(0)=0$ داریم:

$$2f''(2x)=\underbrace{-9g^2(3x)}_{\text{عبارتی که باقی‌مانده}}\times\overbrace{3g''(3x)}^{\text{مشتق عامل صفرکننده}} \quad (II)$$

گام چهارم: در (II) مقدار $x=0$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=0: 2f''(0)=-27g^2(0)g''(0)$$

$$\Rightarrow \frac{g''(0)}{f''(0)}=\frac{2}{-27g^2(0)}=\frac{-2}{27\times 4}=-\frac{1}{54}$$

تست و پاسخ ۵

هرگاه $f(x)=6x+\frac{a}{x}$، به طوری که $f'(1)=f''(1)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۱

گام اول: از روی ضابطهٔ $f(x)$، $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم:

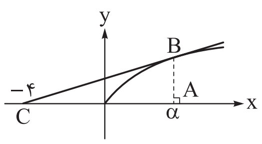
$$f(x)=6x+\frac{a}{x} \qquad f'(x)=6-\frac{a}{x^2} \qquad f''(x)=-a\left(\frac{0\times x^2-2x}{(x^2)^2}\right)=\frac{2ax}{x^4}=\frac{2a}{x^3}$$

گام دوم: از $f'(1)=f''(1)$، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=6-\dfrac{a}{1^2}=6-a \\ f''(1)=\dfrac{2a}{1^3}=2a \end{array}\right\} \Rightarrow 6-a=2a \Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$$

تست و پاسخ ۶

نمودار $y=\sqrt{x}$ و خط مماس بر آن در نقطهٔ $x=\alpha$، رسم شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $5\sqrt{6}$
۲) $\frac{12}{\sqrt{2}}$
۳) ۸
۴) $7\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره از فصل مشتق تا سه سؤال هم ممکن است در کنکور مطرح شود. یکی فرمول‌ها، یکی مشتق‌پذیری و دیگری خط مماس.

درس‌نامه نوشتن معادلهٔ خط مماس بر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای با طول $x=a$:

۱) با قراردادن a در ضابطهٔ تابع، عرض نقطه را به دست می‌آوریم: $(a,f(a))$

۲) با قراردادن a در مشتق تابع، $f'(a)$ یا شیب خط مماس را به دست می‌آوریم.

۳) معادلهٔ مماس برابر می‌شود با: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

گام اول: برای به دست آوردن مساحت مثلث ABC، لازم است که مقدار α را بیابیم. $B\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \sqrt{\alpha}\end{array}\right.$ نقطهٔ تماس خط مماس و تابع $y=\sqrt{x}$ است. شیب خط مماس برابر با مقدار مشتق تابع $y=\sqrt{x}$ در نقطهٔ $x_B=\alpha$ است:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x_B=\alpha} y'=m_{\text{خط}}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

گام دوم: معادلهٔ خط با شیب $m=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ و نقطهٔ $B\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \sqrt{\alpha}\end{array}\right.$ واقع بر آن برابر است با:

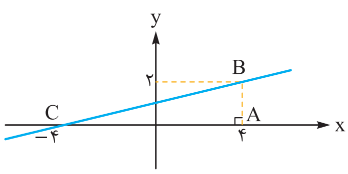
$$y-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) \Rightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}x+\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$$

گام سوم: نقطهٔ $C\left|\begin{array}{l}-4\\ 0\end{array}\right.$ روی خط قرار دارد؛ پس در معادلهٔ آن صدق می‌کند:

$$0=\frac{-4}{2\sqrt{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}}{2}=\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \alpha=4$$

پس مختصات نقطهٔ B به صورت $B\left|\begin{array}{l}4\\ 2\end{array}\right.$ است.

گام چهارم: مساحت مثلث ABC را می‌یابیم.



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}\times 8\times 2=8$$

تست و پاسخ ۷

حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos 2x\cos 3h+\sin 2x\sin 3h-\cos 2x}{h}$ کدام است؟

۱) $-6\sin 2x$
۲) $-2\sin 2x$
۳) $6\sin 2x$
۴) $-3\sin 2x$

پاسخ: گزینهٔ ۳

گام اول: حد داده‌شده را به کمک نسبت‌های مثلثاتی، ساده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\cos 3h+\sin 2x\sin 3h-\cos 2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2x-3h)-\cos 2x}{h}$$

گام دوم: از تغییر متغیر $-3h=t$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos(2x+t)-\cos 2x}{-\frac{t}{3}}=-3\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t+2x)-\cos 2x}{t}$$

گام سوم: تعریف مشتق تابع در نقطهٔ a به صورت $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}$ است. با مقایسهٔ تعریف مشتق با حد به‌دست‌آمده در گام دوم، داریم:

$$-3\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t+2x)-\cos 2x}{t}=-3(\cos 2x)'=-3(-2\sin 2x)=6\sin 2x$$

تست و پاسخ ۸

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=2x-\sqrt{x}$ در بازهٔ $[1,a]$، با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=4$ برابر است. مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=a$ کدام است؟

$f'(4)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

۱) $\frac{11}{6}$ ۲) $\frac{23}{6}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

۱) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$

۲) $f'(x_0)=$ آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در نقطهٔ $x=x_0$

گام اول: آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازهٔ $[1,a]$ می‌یابیم:

تجزیه می کنیم.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{2a-\sqrt{a}-(2-\sqrt{1})}{a-1}=\frac{2a-\sqrt{a}-1}{a-1}=\frac{(\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=4$، همان مقدار مشتق تابع در $x=4$ است، داریم:

$$f(x)=2x-\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=2-\frac{1}{2\sqrt{4}}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

گام سوم: مقدار آهنگ تغییر متوسط را با $f'(4)$ برابر قرار می‌دهیم تا مقدار a را پیدا کنیم:

$$\frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}=\frac{7}{4}\Rightarrow 8\sqrt{a}+4=7\sqrt{a}+7\Rightarrow \sqrt{a}=3\Rightarrow a=9$$

گام چهارم: آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=a=9$ برابر است با:

$$f'(a)=f'(9)=2-\frac{1}{2\sqrt{9}}=2-\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$$

تست و پاسخ ۹

استوانه‌ای درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده است، به طوری که حجم استوانه تابعی از ارتفاع آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم استوانه در صورتی که ارتفاع استوانه برابر با ۴ باشد، چه عددی است؟

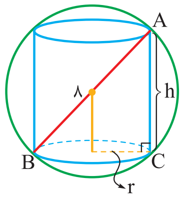
$V'(4)=?$

۱) 2π ۲) 8π ۳) 12π ۴) 4π

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره: یک شکل بکشید و ارتباط بین ارتفاع و شعاع قاعدهٔ استوانه را با شعاع کره به دست آورید. با جای‌گذاری، از حجم استوانه مشتق بگیرید.

پاسخ تشریحی **گام اول**: یک شکل فرضی از مسئله رسم می‌کنیم:



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$(2r)^2+h^2=64 \Rightarrow r^2=\frac{64-h^2}{4}$$

گام دوم: فرمول حجم استوانه را برحسب ارتفاع استوانه به دست می‌آوریم:

$$V=\pi r^2 h=\pi(16-\frac{h^2}{4}).h \Rightarrow V(h)=\pi(16h-\frac{h^3}{4})$$

گام سوم: از $V(h)$ مشتق می‌گیریم تا آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم استوانه را در $h=4$، به دست آوریم:

$$V'(h)=\pi(16-\frac{3}{4}h^2) \xrightarrow{h=4} V'(4)=\pi(16-\frac{3}{4}\times 16)=4\pi$$

حسابان یازدهم: صفحه‌های ۷۱ تا ۹۰

تست و پاسخ ۱۰

نمودار دو تابع $y=9^x-1$ و $y=4\times 3^x-4$، در نقاط A و B متقاطع هستند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{59}$ ۲) $\sqrt{53}$ ۳) $\sqrt{65}$ ۴) $\sqrt{63}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره: از فصل توابع نمایی و لگاریتمی معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید که جزء مباحث سادهٔ کنکور است؛ پس حتماً روی آن حساب ویژه‌ای باز کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول**: برای یافتن نقاط A و B، داریم:

$$9^x-1=4\times 3^x-4 \Rightarrow (3^x)^2-4\times 3^x+3=0 \quad (*)$$

گام دوم: از تغییر متغیر $3^x=t$ استفاده می‌کنیم تا معادلهٔ $(*)$ را حل کنیم:

$$t^2-4t+3=0 \Rightarrow (t-1)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1=3^x \Rightarrow x=0 \\ t=3=3^x \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

گام سوم: فرض می‌کنیم $x_A=0$ و $x_B=1$ باشد، عرض این نقاط را می‌یابیم:

$$y_A=9^0-1=0 \Rightarrow A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$$

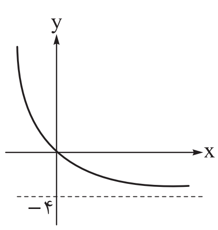
$$y_B=9^1-1=8 \Rightarrow B\begin{vmatrix}1\\8\end{vmatrix}$$

گام چهارم: طول پاره‌خط AB برابر می‌شود با:

$$AB=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$$

تست و پاسخ ۱۱

نمودار وارون تابع $f(x)=-\log_2(ax+b)$ به صورت زیر است. مقدار $f^{-1}(-3)$ چه عددی است؟



۱) ۲۱
۲) $\frac{14}{3}$
۳) ۱۴
۴) ۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره: از روی نمودار f داریم:

$f^{-1}(0)=0$ $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=-4$

راه حل اول: **گام اول:** از ضابطه‌ای که برای $f(x)$ داده شده، وارون این تابع را می‌یابیم:

$$y=-\log_{۲}(ax+b) \Rightarrow ax+b=۲^{-y} \Rightarrow ax=۲^{-y}-b \Rightarrow x=\frac{۲^{-y}-b}{a}$$

$$\xrightarrow{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم.}} f^{-۱}(x)=\frac{۲^{-x}-b}{a}$$

گام دوم: از روی نمودار $f^{-۱}(۰)=۰$ است؛ پس:

$$۰=\frac{۱-b}{a} \Rightarrow b=۱ \quad (I)$$

گام سوم: از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-۱}(x)=-۴$ است، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^{-x}-b}{a}=\frac{۲^{-\infty}-b}{a}=\frac{۰-b}{a}=\frac{-b}{a}=-۴ \xrightarrow{(I)} a=\frac{۱}{۴}$$

گام چهارم: بنابراین $f^{-۱}(x)=۴(۲^{-x}-۱)$ و $f^{-۱}(-۳)=۴(۲^{۳}-۱)=۲۸$ می‌شود.

راه حل دوم: **گام اول:** از روی نمودار $f^{-۱}(۰)=۰$ است؛ پس $f(۰)=۰$ می‌شود، داریم:

$$f(x)=-\log_{۲}(ax+b) \Rightarrow ۰=-\log_{۲}(b) \Rightarrow b=۲^{۰}=۱$$

گام دوم: از $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-۱}(x)=-۴$ نتیجه می‌گیریم که $f(-۴)=+\infty$ است، داریم:

$$+\infty=-\log_{۲}(-۴a+۱) \Rightarrow -۴a+۱=۲^{-\infty}=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

ادامهٔ حل همانند گام چهارم راه حل اول است.

تست و پاسخ ۱۲

فرض کنیم $f(x)=\log_{۲} ۴x$ باشد. در این صورت نمودار تابع $y=۲f(\frac{۲}{x})$ بر کدام تابع منطبق است؟

۱) $۱۰-۲f(x)$ ۲) $۸-۳f(x)$ ۳) $۶-f(x)$ ۴) $۸+۲f(x)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خلوت حل‌های بهینه: $f(\frac{۲}{x})$ را با جای‌گذاری به دست آورید.

درس‌نامه: ویژگی‌های لگاریتم

ویژگی	توضیح
$y=a^{x} \Leftrightarrow \log_a y=x$	رابطه‌های لگاریتمی را می‌توانیم به صورت توانی بنویسیم و برعکس.
$y=\log_b a \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} a>۰ \\ b>۰ \\ b\neq ۱ \end{cases}$	برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی بین سه شرط اشتراک می‌گیریم.
$\log_b ۱=۰ , \log_a a=۱$	لگاریتم ۱ در هر پایه‌ای صفر و لگاریتم هر عدد در پایهٔ خودش برابر یک است.
$\log_b a^{n}=n\log_b a$	توان عبارت جلوی لگاریتم به پشت لگاریتم می‌رود. $(a>۰)$
$\log_{b^{n}} a=\frac{۱}{n}\log_b a$	توان پایهٔ لگاریتم، معکوس شده و به پشت لگاریتم می‌رود.
$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$	لگاریتم ضرب دو عدد تبدیل به جمع لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$	لگاریتم تقسیم دو عدد تبدیل به تفاضل لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$	ویژگی تغییر پایه
$\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$	اگر جای a و b عوض شود، حاصل معکوس می‌شود، مثلاً $\log_{۳} ۲$ و $\log_{۲} ۳$ معکوس هم هستند.

گام اول: ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:
$$f(x)=\log_2 4x=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$$

گام دوم: حالا در تابع y داریم:
$$y=2f(\frac{2}{x})=2(2+\log_2\frac{2}{x})=2(2+\log_2 2-\log_2 x)=2(2+1-\log_2 x)=6-2\log_2 x \quad (*)$$

گام سوم: با توجه به گام اول، $\log_2 x=f(x)-2$ است. با جای‌گذاری در $(*)$، داریم:
$$y=6-2(f(x)-2)=6-2f(x)+4=10-2f(x)$$

تست و پاسخ ۱۳

اگر تابع f به صورت $f(x)=x-[x]$ باشد و مقدار $f(\log_2 24)$ با $f(\log_2 n)$ برابر باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹۶ ۳) ۵۴ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

ابتدا $f(\log_2 24)$ را به دست آورید و سپس با جای‌گذاری مقدار n با توجه به گزینه‌ها، جواب را پیدا کنید.

نکته: اگر اختلاف دو عدد α و β عدد صحیح باشد، آن‌گاه با فرض $f(x)=x-[x]$، مقدار $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ برابر است.

گام اول: ابتدا حاصل $f(\log_2 24)$ را پیدا می‌کنیم:
$$f(\log_2 24)=f(\log_2 3\times 2^3)=f(\log_2 3+3)=\log_2 3+3-[\log_2 3+3]$$
$$=\log_2 3+3-3-[\log_2 3]=\log_2 3-[\log_2 3]$$

گام دوم: هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $n=18\Rightarrow f(\log_2 18)=f(\log_2 2\times 3^2)=f(1+2\log_2 3)=1+2\log_2 3-[1+2\log_2 3]=2\log_2 3-[2\log_2 3]\neq f(\log_2 24)\times$

۲) $n=96\Rightarrow f(\log_2 96)=f(\log_2 3\times 2^5)=f(5+\log_2 3)=5+\log_2 3-[5+\log_2 3]=\log_2 3-[\log_2 3]=f(\log_2 24)\checkmark$

۳) $n=54\Rightarrow f(\log_2 54)=f(\log_2 2\times 3^3)=f(1+3\log_2 3)=3\log_2 3-[3\log_2 3]\neq f(\log_2 24)\times$

۴) $n=36\Rightarrow f(\log_2 36)=f(\log_2 2^2\times 3^2)=f(2+2\log_2 3)=2\log_2 3-[2\log_2 3]\neq f(\log_2 24)\times$

پس ۲ درست است و $n=96$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۴

معادلهٔ $\log_{\sqrt{x}} k+2\log_{k^2} x=3$ علاوه بر $x=4$، ریشهٔ دیگر برابر با α دارد. مقدار α چه عددی است؟

۱) ۸ یا ۲ ۲) ۱۶ یا ۲ ۳) ۸ یا ۱۶ ۴) فقط ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

$x=4$ را در معادله جای‌گذاری کنید تا مقدار k را بیابید.

گام اول: با جای‌گذاری $x=4$ در معادله، ابتدا مقدار k را پیدا می‌کنیم:
$$\log_{\sqrt{x}} k+2\log_{k^2} x=3\xrightarrow{x=4}\log_2 k+\frac{2}{2}\log_k 4=3\Rightarrow \log_2 k+\log_k 2^2=3\Rightarrow \log_2 k+2\log_k 2=3$$

گام دوم: از تغییر متغیر $\log_2 k=\frac{1}{\log_k 2}=t$ استفاده می‌کنیم، داریم:
$$t+\frac{2}{t}=3\Rightarrow t^2-3t+2=0\Rightarrow (t-2)(t-1)=0\Rightarrow \begin{cases}t=1=\log_2 k\\ t=2=\log_2 k\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}k=2\\ \text{یا}\\ k=4\end{cases}$$

هر دو مقدار k قابل قبول است، چون در شرط لگاریتم صدق می‌کنند؛ پس به ازای هر دو مقدار k، معادله را تشکیل می‌دهیم تا ریشهٔ دیگر (α) را پیدا کنیم.

گام سوم:

$$1)\ k=2:\log_{\sqrt{x}}2+2\log_{4}x=3 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_x 2+\frac{2}{2}\log_2 x=3$$

$$\xrightarrow{\log_2 x=A} \frac{2}{A}+A-3=0 \Rightarrow A^2-3A+2=0 \Rightarrow \begin{cases} A=2=\log_2 x \\ \text{یا} \\ A=1=\log_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ \text{یا} \\ x=2=\alpha \end{cases}$$

$$2)\ k=4:\log_{\sqrt{x}}4+2\log_{16}x=3 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_x 4+\frac{2}{2}\log_4 x=3$$

$$\xrightarrow{\log_4 x=A} \frac{2}{A}+A-3=0 \Rightarrow A^2-3A+2=0 \Rightarrow \begin{cases} A=2=\log_4 x \\ \text{یا} \\ A=1=\log_4 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16=\alpha \\ \text{یا} \\ x=4 \end{cases}$$

پس مقدار α می‌تواند ۲ یا ۱۶ باشد.

تست و پاسخ ۱۵

هرگاه $\log_6(2a+b)=\log_2 4a=\log_3 3b$، مقدار $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ چه عددی است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره سؤال مهم و مشابه سؤال‌های کنکور است. از ویژگی‌های لگاریتم حتماً سؤال می‌آید که با توجه به حجم کم آن‌ها، بهتر است آن را حل کنید.

راه حل ساده برای این تیپ سؤالات، همانی است که در پاسخ تشریحی بیان شده است. این روش حل را برای بحث لگاریتم، در نظر داشته باشید!!

پاسخ تشریحی **گام اول**: فرض می‌کنیم عبارت‌های داده‌شده برابر با k باشند و a و b را برحسب k به دست می‌آوریم:

$$\log_6(2a+b)=\log_2 4a=\log_3 3b=k$$

$$1)\ \log_2 4a=k \Rightarrow 4a=2^k \Rightarrow a=\frac{2^k}{2^2}=2^{k-2}$$

$$2)\ \log_3 3b=k \Rightarrow 3b=3^k \Rightarrow b=3^{k-1}$$

$$3)\ \log_6(2a+b)=k \Rightarrow 2a+b=6^k$$

گام دوم: حاصل عبارت خواسته‌شده را برحسب k می‌نویسیم:

$$\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=\frac{2a+b}{ab}=\frac{6^k}{2^{k-2}\times 3^{k-1}}=\frac{6^k}{\underbrace{2^k\times 3^k}_{6^k}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}=12$$

تست و پاسخ ۱۶

اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $\log_2(3\times 2^x-4)=2x-1$ با یکدیگر چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره در حل معادلات لگاریتمی، تا حد امکان از خواص لگاریتم استفاده کنید تا معادله به ساده‌ترین شکل ممکن برسد.

پاسخ تشریحی **گام اول**: برای حل معادله، از خاصیت $\log_b a=c \Rightarrow a=b^c$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\log_2(3\times 2^x-4)=2x-1 \Rightarrow 3\times 2^x-4=2^{2x-1}=\frac{2^{2x}}{2} \Rightarrow 6\times 2^x-8=2^{2x}\quad (*)$$

گام دوم: برای حل معادلهٔ (*) از تغییر متغیر $t = 2^x$ استفاده می‌کنیم:

$$6t-8=t^2 \Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow (t-2)(t-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2=2^x \\ \text{یا} \\ t=4=2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{یا} \\ x=2 \end{cases}$$

گام سوم: اختلاف ریشه‌ها برابر با ۱ است.

تست و پاسخ ۱۷

اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=\dfrac{2^{x+1}}{2^x+1}$ باشد، مقدار $f(1)+g(\frac{16}{9})$ چه عددی است؟

۱) ۵   ۲) $\frac{13}{3}$ ۳) $\frac{28}{3}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

گام اول: چون $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است. از خاصیت وارون تابع استفاده می‌کنیم:

$$g(\frac{16}{9})=a \Rightarrow \frac{16}{9}=g^{-1}(a)=f(a)$$

حالا از رابطهٔ $f(a)=\frac{16}{9}$، مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$$f(a)=\frac{2^{a+1}}{2^a+1}=\frac{16}{9}=\frac{2^4}{2^3+1}$$

واضح است که $a=3$ است؛ پس $g(\frac{16}{9})=3$ می‌شود.

گام دوم: مقدار $f(1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(1)=\frac{2^{1+1}}{2^1+1}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$$

گام سوم: مقدار خواسته‌شده برابر با $f(1)+g(\frac{16}{9})=\frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۸

دوچرخه‌ای در هر روز ۴ درصد باد موجود در لاستیک خودش را از دست می‌دهد. چه‌قدر طول می‌کشد تا باد دوچرخه به $\frac{1}{5}$ باد اولیهٔ خود برسد؟ ($\log 3 = 0/47$ ، $\log 2 = 0/3$)

۱) $\frac{80}{3}$ روز   ۲) ۲۵ روز   ۳) ۲۴ روز   ۴) $\frac{70}{3}$ روز

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره درست است که از کاربردهای لگاریتم کم‌تر سؤال در کنکور مطرح شده است، اما سابقهٔ سؤال آمدن دارد. اگر به دنبال درصدهای بالاتر در کنکور هستید، به آن نیز بپردازید.

خلوت حل تشریحی هر روز، ۹۶٪ آن باقی می‌ماند.

درس‌نامه **الگوهای رشد یا زوال:** فرض کنید مقدار اولیه A_0 باشد، اگر پس از گذشت هر t سال:

الف) r درصد افزایش یابد، مقدار آن پس از n سال برابر $A_0(1+\frac{r}{100})^{\frac{n}{t}}$ می‌شود.

ب) r درصد کاهش یابد، مقدار آن پس از n سال برابر $A_0(1-\frac{r}{100})^{\frac{n}{t}}$ می‌شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون دوچرخه در هر روز، ۴ درصد باد موجود را از دست می‌دهد؛ پس ۹۶ درصد باد آن در هر روز باقی می‌ماند.

فرض می‌کنیم باد اولیهٔ دوچرخه، A_0 باشد، در این صورت بعد از n روز، باد ماندهٔ لاستیک از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$A=A_0(0/96)^n$$

گام دوم: باد دوچرخه بعد از n روز به $\frac{۱}{۵}$ باد اولیهٔ خود یعنی $\frac{۱}{۵}A_{\circ}$ می‌رسد. n را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۵}A_{\circ}=A_{\circ}(\circ/۹۶)^{n}\Rightarrow(\circ/۹۶)^{n}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\log_{\circ/۹۶}(\quad)}n=\log_{\circ/۹۶}\frac{۱}{۵}$$

$$\xrightarrow{\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}}n=\frac{\log ۵^{-۱}}{\log\circ/۹۶}=\frac{-\log ۵}{\log ۹۶-\log ۱\circ\circ}=\frac{\log ۵}{\log ۱\circ^{۲}-\log ۳\times ۲^{۵}}$$

$$=\frac{۱-\log ۲}{۲\log ۱\circ-(\log ۳+۵\log ۲)}=\frac{۱-\log ۲}{۲-\log ۳-۵\log ۲}\quad(*)$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقادیر $\log ۲$ و $\log ۳$ (در صورت سؤال داده شده) در $(*)$، مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$n=\frac{۱-\circ/۳}{۲-\circ/۴۷-۵\times\circ/۳}=\frac{\circ/۷}{\circ/\circ۳}=\frac{۷\circ}{۳}$$

پس یعنی $\frac{۷\circ}{۳}$ روز طول می‌کشد تا میزان باد به $\frac{۱}{۵}$ مقدار باد اولیه برسد.