ریاضی

رشته تجربی

- درسنامه های جامع همراه با نکات طلایی
- تست های طبقه بندی شده برای هر درس به همراه پاسخ نامه
- سوالات امتحان نهایی
- تست های کنکور سال های گذشته

سالار عموزاده

پاسخ گویی به سؤال‌های پیشروی نرمال برای همه دانش آموزان **اجباری** است.

مشتق (صفحه‌های: ۷۷ تا ۱۰۰) — پیشنهادی : ۲۰ دقیقه

۱۴۱- معادلهٔ حرکت متحرکی $x(t)=t^2+3t+1$ است. آهنگ متوسط در بازهٔ $[2,4]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان متحـرک در شروع بازه بیشتر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

۱۴۲- در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+b}{x-2} & x\neq 2\\ c & x=2\end{cases}$ ، اگر $f'(2)=3$ باشد، حاصل $a-b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲۷ ۳) ۳- ۴) ۲۷-

۱۴۳- اگر $f(x)=\dfrac{4-x}{2x+7}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{f(-1)}}{x+1}$ کدام است؟ آزمون وی ای پی

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{-1}{5}$

۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{-1}{15}$

۱۴۴- تابع $f(x)=x^2[x^2]|x-3|$ مفروض است. اگر شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ این تابع در $x=3$ به ترتیـب برابـر مقـادیر m_1 و m_2 باشند، آنگاه حاصل $\sqrt{m_1+m_2}$ کدام است؟([ ] : نماد جزء صحیح است.)

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۴۵- اگر $f(x)=2-\sqrt{x+3}$ باشد، مشتق $g(x)=f(\dfrac{f(x)}{x^2})$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{12}$

۳) $\frac{\sqrt{6}}{24}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{12}$

۱۴۶- خط L موازی محور x ها سهمی $f(x)=2x^2-3$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده بر سهمی در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض این دو نقطه کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ ۲) $-\frac{23}{4}$ ۳) $\frac{21}{4}$ ۴) $-\frac{21}{4}$

۱۴۷- توابع f و g روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته هستند، اگر $f(5)=3$، $g(2)=5$، $f'(5)=4$، $g'(3)=-2$ و $g'(2)=\frac{1}{2}$ باشـند، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(f(g(x)))-g(3)}{2x-4}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

۱۴۸- اگر $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^4-3x^2+2}$ باشد، آنگاه مقدار $f''(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$

۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴۹- تابع $f(x)=|x^3+mx^2+(m+3)x|$ فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است. مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۵

۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۵۰- تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,0\leq x<1 \\ \dfrac{x^2}{3}-2x+\dfrac{8}{3} & ,1\leq x<4 \end{cases}$ با دوره تناوب ۴ را در نظر بگیرید. اگر نیم‌مماس‌های واقع بر منحنی این تابع در نقطه‌ای به طول $x=-7$ محور عرض‌ها را در نقاط A و B قطع کنند، جزء صحیح طول پاره خط AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۳ ۳) ۳۰ ۴) ۳۹

پاسخ گویی به سؤال‌های پیش‌روی سریع برای همه دانش آموزان **اختیاری** است.

کاربرد مشتق (صفحه‌های: ۱۰۱ تا ۱۲۰) — پیشنهادی : ۲۰ دقیقه

۱۵۱- تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-a\sqrt{x+2}$ در فاصله $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی است و در هیچ‌یک از زیر مجموعه‌های بازه $(-2 , 2)$ اکیداً صعودی نیست. a چه مقداری خواهد بود؟

۱) ± 4 ۲) ۴ ۳) -4 ۴) هیچ مقدار

۱۵۲- تابع $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x-a}$ دارای ۳ نقطه بحرانی به طول‌های ۱، a و ۷ می‌باشد، مساحت مثلثی که با این ۳ نقطهٔ بحرانی تشکیل می‌شود، کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۱۲۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۴۴

۱۵۳- مساحت چهارضلعی که از اتصال نقاط بحرانی تابع $y=x||x|-4|$ حاصل می‌شود، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

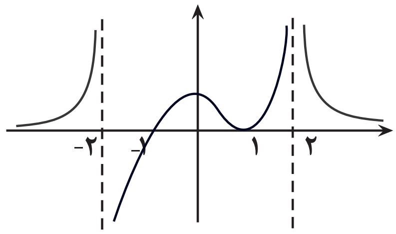
۱۵۴- تابع $f(x)=x^2-[\cos x]$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ به ترتیب چند نقطه ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی دارد؟

۱) صفر - صفر ۲) صفر -1 ۳) $1-1$ ۴) $1-2$

۱۵۵- اگر $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}$ در $A(1,2)$ اکسترمم نسبی داشته باشد، عرض اکسترمم دیگر آن کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$
۲) $-\frac{4}{3}$
۳) $-\frac{8}{3}$
۴) $-\frac{10}{3}$

۱۵۶- نمودار مشتق تابع پیوسته $f(x)$ به صورت مقابل است. طول نقطه min نسبی تابع $g(x)=-f(2-x)$ کدام است؟



۱) $x=1$
۲) $x=4$
۳) $x=0$
۴) $x=3$

۱۵۷- فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=x-\sqrt{2x-x^2}$ از نیمساز ربع‌های اول و سوم کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

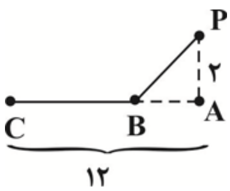
۱۵۸- اگر $f(x)=-x^3-4x-10$ و $g(x)=-2x^3+6x^2-3$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع fog در بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) -110
۲) -95
۳) -116
۴) -126

۱۵۹- اگر مجموع یک قطر و یک ضلع مستطیل برابر ۹ باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $9\sqrt{2}$
۲) $9\sqrt{3}$
۳) $8\sqrt{2}$
۴) $8\sqrt{3}$

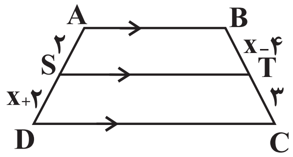
۱۶۰- شخصی با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه P به نقطه B رفته و سپس با سرعت ۱۲ متر بر ثانیه به نقطه C می‌رود. حداقل زمان ممکن برای این حرکت تقریباً چند ثانیه است؟ $(\sqrt{2}=1/4)$



۱) $0/53$
۲) $0/94$
۳) $1/48$
۴) $1/77$

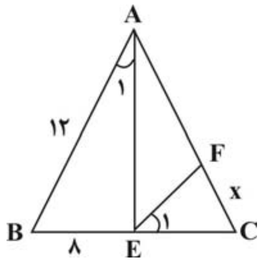
هندسه (ریاضی۲ ، صفحه‌های: ۳۱ تا ۴۶)
پیشنهادی : ۲۰ دقیقه

۱۶۱- در ذوزنقه مقابل اگر $AB||ST||DC$ باشد، مقدار x کدام است؟



۱) $۲+\sqrt{۱۵}$
۲) $۲+۲\sqrt{۱۵}$
۳) $۱+\sqrt{۱۵}$
۴) $۱+۲\sqrt{۱۵}$

۱۶۲- در شکل رو به رو مثلث ABC متساوی الاضلاع است. مقدار x کدام است؟ $(\widehat{A}_۱=\widehat{E}_۱)$

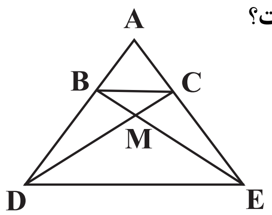


۱) ۱
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) ۳

۱۶۳- اگر $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\alpha$ باشد، کدامیک از نسبت‌های زیر برابر $\alpha^۲+۲\alpha+۱$ است؟

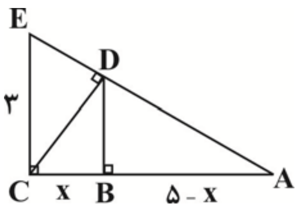
۱) $\frac{(x+y)(a+b)}{yb}$
۲) $۱+(\frac{x+a}{y+b})^۲$
۳) $(\frac{a+۱}{b+۱})^۲$
۴) $\frac{(x-y)(a+b)}{by}$

۱۶۴- در شکل مقابل، $BC||DE$ و $AD=nAB$ است. نسبت مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به $\overset{\Delta}{MBC}$ کدام است؟



۱) $\frac{n-۱}{n+۱}$
۲) $\frac{۲n+۱}{n-۱}$
۳) $\frac{۲n-۱}{n+۱}$
۴) $\frac{n+۱}{n-۱}$

۱۶۵- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟

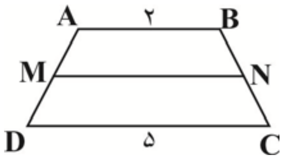


۱) $\frac{۹}{۳۴}$
۲) $\frac{۳۵}{۳۴}$
۳) $\frac{۴۷}{۳۴}$
۴) $\frac{۴۵}{۳۴}$

۱۶۶- مثلثی به اضلاع a ، ۴ و ۳ با مثلثی به طول اضلاع b، ۶ و ۵ متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای b کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۵

۱۶۷- در ذوزنقه روبرو طول قاعده‌ها ۲ و ۵ است. پاره‌خطی موازی قاعده، سطح ذوزنقه را نصف می‌کند. طول این پاره‌خط چقدر است؟



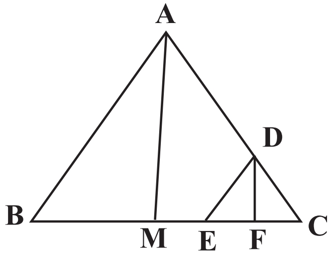
۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۵۸}}{۲}$

۴) $\sqrt{۱۰}$

۱۶۸- در مثلث ABC مطابق شکل $\frac{AD}{DC}=۴$ و پاره خط DE موازی AB و AM میانه ضلع BC و DF موازی AM است. طول پاره خط EF چه نسبتی از طول BC است؟



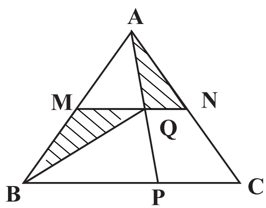
۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۲۰}$

۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۱۶۹- در مثلث ABC داریم، $MN \| BC$ و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۴}$ و نیز $PB=۳PC$ می‌باشد. مساحت مثلث BMQ چند برابر AQN است؟



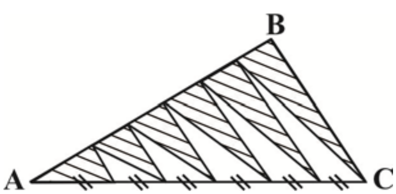
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۵

۴) ۱۲

۱۷۰- در شکل زیر AB و AC به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. نسبت مساحت قسمت‌های سایه زده شده به مساحت قسمت‌های سفید چقدر است؟



۱) $\frac{۹}{۷}$

۲) $\frac{۸}{۷}$

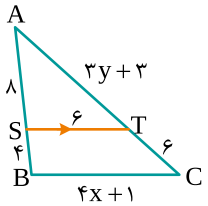
۳) $\frac{۶}{۷}$

۴) $\frac{۷}{۵}$

۹۶- اگر $\frac{a+b}{a-b}=6$، آن‌گاه مقدار $\frac{2a-b}{3a}$ کدام است؟

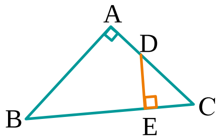
۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۹۷- در شکل مقابل، $ST \parallel BC$ است. حاصل $x+y$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۷

۹۸- در شکل مقابل، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و DE بر BC عمود است. اگر $AB=16$ و $DE=6$ و $BC=20$ باشد، اندازه EC کدام است؟



۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

۹۹- اگر $f(x)=(x^2+2)^2(x+3)^3$، آن‌گاه مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) ۱۲۶۴ ۲) ۱۱۶۴ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۱۱۰۰

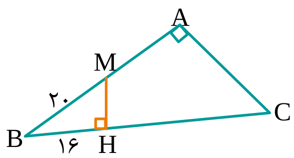
۱۰۰- اگر نقطهٔ $A(2,1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، حاصل $2b+d$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۱۰۱- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزولی اکید است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

۱۰۲- در مثلث شکل مقابل، از نقطهٔ M وسط ضلع AB عمود MH را بر وتر BC وارد کرده‌ایم. محیط چهارضلعی $AMHC$ چند برابر فاصلهٔ رأس A از ضلع BC است؟ $(BH=16\ ,\ BM=20)$



۱) ۳ ۲) $\frac{7}{2}$
۳) ۴ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۰۳- در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۲۴ و ۴۰، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق برابر ۱۵۰ واحد مربع است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

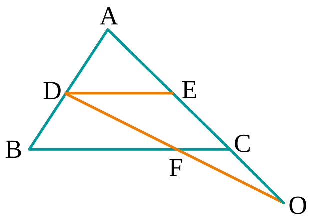
۱) ۳۲۰ ۲) ۶۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

محل انجام محاسبات

۱۰۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD، از رأس D خطی رسم می‌کنیم تا قطر AC را در نقطهٔ M و امتداد ضلع AB را در نقطهٔ N قطع کند. اگر $\frac{AM}{AC}=\frac{۵}{۹}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{AN}{AB}$ کدام است؟

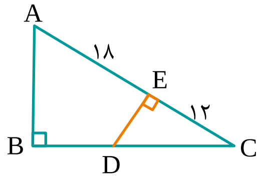
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۰۵- در شکل مقابل، $DE \| BC$ و D وسط ضلع AB است. اگر طول BF، ۵ برابر طول FC باشد، طول OC چند برابر طول AE است؟



۱) ۰/۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۴
۴) ۰/۷

۱۰۶- در شکل مقابل، فاصلهٔ رأس E از ضلع BC برابر ۷/۲ است. اگر $AB=x$ و $BD=y$ باشد، حاصل $۲x+۳y$ کدام است؟

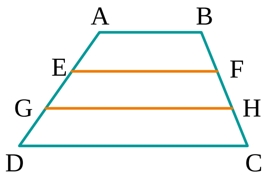


۱) ۷۲
۲) ۴۸
۳) ۵۷
۴) ۶۳

۱۰۷- در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، اگر $AB=۲۸$ و $AC=۱۶$ و $BC=۲۰$ و نقطه‌های D و E و F به ترتیب روی اضلاع AB و AC و BC به گونه‌ای قرار دارند که چهارضلعی ADFE لوزی است. اندازه FC کدام است؟

۱) $\frac{۶۰}{۹}$ ۲) $\frac{۶۰}{۱۱}$ ۳) $\frac{۸۰}{۹}$ ۴) $\frac{۸۰}{۱۱}$

۱۰۸- در شکل مقابل، پاره‌خط‌های EF و GH به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم شده‌اند و ساق‌های ذوزنقه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. اگر $GH=\frac{۵}{۴}EF$ باشد، آن‌گاه مساحت ذوزنقهٔ ABCD چند برابر مساحت ذوزنقهٔ ABFE است؟



۱) $\frac{۲۹}{۷}$ ۲) $\frac{۲۷}{۷}$
۳) $\frac{۲۹}{۶}$ ۴) $\frac{۲۷}{۶}$

۱۰۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) مقدار ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع f در صورت وجود، منحصر به فرد است.
۲) اگر تابع f در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد، قطعاً در این بازه ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد.
۳) هر نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f قطعاً یک نقطهٔ بحرانی تابع f است.
۴) اگر تابعی در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشد، آن‌گاه نقاط $x=a$ ، $x=b$ قطعاً نقاط بحرانی تابع f محسوب می‌شوند.

محل انجام محاسبات

۱۱۰- اگر $f(x)=\frac{2^x\times\sqrt[3]{x}-2^{x+1}}{x-4}$ باشد، حاصل $f'(8)$ کدام است؟

۱) $\frac{32}{3}$ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{16}{3}$

۱۱۱- خط $y=2x+k$ بر منحنی تابع $f(x)=x^2-2x+2k-1$ مماس است. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $x=-2$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -5 ۴) -4

۱۱۲- در کدام‌یک از توابع زیر، هر نقطهٔ بحرانی تابع، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع است؟

۱) $f(x)=x+[x]$ ۲) $f(x)=x+|x|$ ۳) $f(x)=\sqrt{x+3}$ ۴) $f(x)=x^3+x^4$

۱۱۳- به ازای کدام مقدار k بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$ در بازهٔ $[-2,3]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) صفر ۲) ۳۲ ۳) ۳ ۴) ۱۶

۱۱۴- توابع $f'(x)=3x^2-66x+120$ و $g(x)=x^2-x$ مفروضند. وضعیت یکنوایی تابع fog در چند نقطه تغییر می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۵- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x)=|x+1|+|x-4|$ نادرست هستند؟

الف: دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.

ب: تابع فاقد ماکزیمم مطلق است.

پ: تابع در ۶ نقطه با طول صحیح دارای مینیمم مطلق است.

ت: مقدار مینیمم مطلق تابع برابر ۵ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

۱۱۱- کدام جمله نادرست است؟

۱) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجهٔ استفاده از «علم آمار» است.

۲) به ویژگی خاصی از اعضای جامعه که بررسی و مطالعه می‌شود و از عضوی به عضو دیگر معمولاً تغییر می‌کند، نمونهٔ تصادفی می‌گویند.

۳) در سرشماری، نسبت حجم جامعه به حجم نمونه برابر با ۱ است.

۴) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۱۱۲- نوع متغیرهای «جواب‌های معادلات درجه‌دومی که ضرایب‌شان عدد صحیح باشند» و «شیب خطوط گذرنده از نقطهٔ $(2,-3)$ در دستگاه مختصات» به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) پیوسته- پیوسته ۲) پیوسته- گسسته ۳) گسسته- پیوسته ۴) گسسته- گسسته

۱۱۳- حجم یک نمونه برابر $2n^2-7n$ و حجم جامعه‌ای که نمونه را از آن انتخاب کرده‌ایم برابر $21n-10$ است. n چند مقدار طبیعی دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۱۴- چارک اول و چارک سوم داده‌های ۴, ۶, ۷, ۳, ۳, ۱, ۲, ۵, ۶, ۷, ۸, ۴, ۳, ۱ را از بین آن‌ها حذف می‌کنیم. در داده‌های جدید اختلاف چارک اول و سوم کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۱۱۵- ضریب تغییرات اعداد مثبتی برابر ۲ است. اگر به هر کدام از اعداد ۲ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات آن‌ها نصف می‌شود. میانگین داده‌ها در ابتدا چه عددی بوده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶- واریانس داده‌های $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ برابر ۱ است. اگر ضریب تغییرات داده‌ها ۲۵ درصد باشد، مقدار $(x_1-4)^2+(x_2-4)^2+\cdots+(x_{10}-4)^2$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۴۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۱۷- ۱۹ دادهٔ آماری با میانگین ۲۹ و انحراف معیار ۷ داریم. از این داده‌ها، دو دادهٔ ۲۰ و ۳۸ را حذف و سه دادهٔ ۲۷، ۲۸ و ۳۲ را به آن‌ها اضافه می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۳۸/۱۵ ۲) ۳۹/۱۵ ۳) ۴۰/۱۵ ۴) ۴۱/۱۵

۱۱۸- اگر $\bar{x}$ میانگین داده‌های آماری $x_1,x_2,\cdots,x_6$ باشد، با توجه به جدول زیر، دامنهٔ تغییرات داده‌های n^2-3n، $10-n$ و n^4+7n^2 کدام است؟

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$x_i-\bar{x}$	1	-5	n^2	4	n	n^3+1

۱) ۷ ۲) ۶/۵ ۳) ۵ ۴) ۷/۵

۱۱۹- در تعدادی دادهٔ آماری، میانگین، ۸ واحد از تعداد داده‌ها بیشتر است. اگر به داده‌های اولیه که از کوچک به بزرگ مرتب شده‌اند، به‌ترتیب ۱، ۲، ۳، ... و n واحد اضافه کنیم، میانگین داده‌های جدید نسبت به حالت قبل ۱۶ واحد افزایش می‌یابد. میانگین داده‌های اولیه کدام بوده است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۷ ۳) ۳۸ ۴) ۳۹

محل انجام محاسبات

۱۲۰- دو دستهٔ آماری «$1-2x_1, 1-2x_2, \dots, 1-2x_{56}$» و «$2+\frac{x_1}{3}, 2+\frac{x_2}{3}, \dots, 2+\frac{x_{56}}{3}$» را در نظر بگیرید. اگر نسبت ضریب تغییرات دستهٔ دوم به دستهٔ اول، ۲۰ درصد باشد، مجموع داده‌های دستهٔ اول کدام است؟

۱) ۱۸۲ ۲) ۱۹۶ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۴

۱۲۱- پنج عدد طبیعی زوج متوالی کوچک‌تر از ۵۱ را در نظر بگیرید. بیشترین مقدار ممکن برای ضریب تغییرات‌شان تقریباً کدام است؟ ($\sqrt{2} \simeq 1/41$)

۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۳۷ ۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۴۷

۱۲۲- واریانس پنج دادهٔ $a^2-a, a+8, b, b, b$، برابر با صفر است. اگر b عددی دورقمی نباشد، با اضافه کردن عدد ۱۸ به این پنج داده، ضریب تغییرات شش دادهٔ حاصل تقریباً کدام می‌شود؟ ($\sqrt{5} \simeq 2/24$)

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۲ ۳) ۰/۵۶ ۴) ۰/۶۲

۱۲۳- ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $t_n = 2^{n-5}$ را در نظر بگیرید. اگر چارک اول، دوم و سوم این ۲۰ جمله به‌ترتیب برابر با a، b و c باشند، مجموع معکوس ریشه‌های معادلهٔ $2ax^2+bx-c=0$ کدام است؟

۱) 2^{-5} ۲) 2^{-4} ۳) 2^{-3} ۴) 2^{-6}

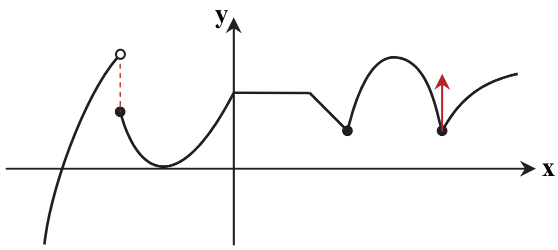
۱۲۴- از هر کدام از داده‌های طبیعی $x+1$، $x+7$ و $2x-40$ به‌ترتیب ۴، ۵ و ۹ تا داریم. اگر میانهٔ این داده‌ها برابر با ۱۷/۵ باشد، چند مقدار متمایز برای x وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۲۵- تابع $f(x)=x^2-4x+4$ مفروض است. در کدام‌یک از نقاط زیر، $f(x)=2f'(x)$ است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) ۶ ۳) $2-\sqrt{2}$ ۴) -6

۱۲۶- شکل روبه‌رو، نمودار تابع f است. تابع f در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲۷- مشتق تابع $f(x)=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^3-2x-5}$ در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{94}{3}$ ۲) ۳۰ ۳) $-\frac{92}{3}$ ۴) $\frac{88}{3}$

محل انجام محاسبات

۱۲۸- تابع $f(x)=\dfrac{۳x+[x]}{\sqrt{۴x^۲+x}+\sqrt[۳]{x^۳-x}}$، مفروض است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۲۹- اگر $f(x)=\dfrac{۲x^۲-bx}{ax+۳}$ و $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-۳x+۲)=۰$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۳}{۳}$ ۲) $-\frac{۲۵}{۳}$ ۳) $\frac{۲۳}{۳}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

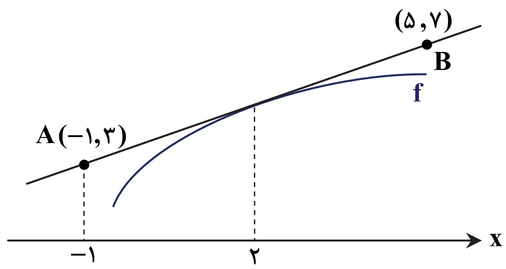
۱۳۰- تابع $f(x)=\begin{cases} ۲ax+b & ;\ x<۲ \\ \sqrt{۲x} & ;\ x\geq ۲\end{cases}$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۱۳۱- عرض از مبدأ خط مماس بر تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲-x}$ در نقطه‌ای به طول ۳ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -۱۳ ۳) -۷ ۴) ۱۴

۱۳۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع f است که خط AB در نقطه‌ای به طول $x=۲$ بر آن مماس شده است. شیب خط مماس بر نمــودار $y=\dfrac{x}{f(x)}$ در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟



۱) $\frac{۱۹}{۷۵}$

۲) $\frac{۱۵}{۱۹}$

۳) $\frac{۱۹}{۲۵}$

۴) $\frac{۱۱}{۷۵}$

۱۳۳- تابع $f(x)=|x^۲+ax+b|$ در نقاطی به‌طول $x=۱$ و $x=a$ مشتق‌ناپذیر است. مقدار $۴a-۲b$ کدام است؟

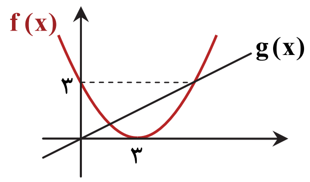
۱) ۶ ۲) ۲/۵ ۳) -۱ ۴) $-۲/۵$

۱۳۴- تابع f خطی است و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|f^{-۱}(x)+۳}{۳x^۲+۲x}=\dfrac{۵}{۴}$. مشتق تابع f در $x=\sqrt{۵}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{-۴\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۴}$

محل انجام محاسبات

۱۳۵- نمودار سهمی $y = f(x)$ و تابع خطی $y = g(x)$ مطابق شکل روبه‌رو است. مشتق تابع $y = \frac{x\,g(x)}{f(x)}$ به‌ازای $x = ۱$ چه عددی است؟

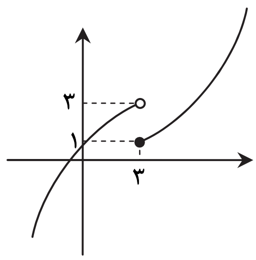


۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۳
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۹}{۸}$

۱۳۶- با فرض $f(x) = \frac{(ax+b)[۲x]}{x^۲ - ۱}$، اگر $f'_+(۲) - f'_-(۲) = -۶$، مقدار a کدام است؟

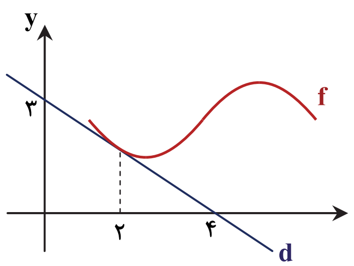
۱) -۱۸ ۲) ۱۲ ۳) -۱۲ ۴) ۲۴

۱۳۷- شکل روبه‌رو نمودار تابع f است. اختلاف مشتق چپ و مشتق راست تابع $g(x) = \frac{[x](۳-x)}{f(x)}$ در $x = ۳$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۱}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۳۸- بخشی از نمودار تابع f، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر $\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲-h)-f(۲)}{۲h} = L$ و $\lim_{x\to ۲} \frac{f^۲(x)-f^۲(۲)}{x^۲-۴} = L'$ باشد، مقدار $L - L'$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$
۲) $-\frac{۳}{۸}$
۳) $-\frac{۳}{۱۶}$
۴) صفر

۱۳۹- اگر $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{۴x+۴} - ۲\sqrt{x})$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$، مقدار $f(L)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲(\sqrt{۲}+۱)$ ۴) $۲(\sqrt{۲}-۱)$

۱۴۰- اگر $f(x) = \frac{۲^{۲x-۱} - ۳^{۱-x}}{۴^x + ۳^x}$، مقدار $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

محل انجام محاسبات

ریاضی دوازدهم و پایهٔ مرتبط: ریاضی (۳): صفحه‌های ۹۳ تا ۱۲۰

۱۱۱- تابع $f(x)=3x^4-x^3$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(0,\frac{1}{4})$ ۲) $(-\frac{1}{4},0)$ ۳) $(-\infty,-\frac{1}{4})$ ۴) $(\frac{1}{4},+\infty)$

۱۱۲- مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^2(x+3)+1$ در بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۳- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{x^2+2}{x}$ در بازهٔ $[1,2]$، با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه، برابر است؟

۱) $x=\frac{3}{2}$ ۲) $x=\sqrt{2}$ ۳) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $x=\sqrt{3}$

۱۱۴- نقطهٔ $M(x,y)$ را بر نمودار تابع $f(x)=x^2$ در نظر می‌گیریم. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از خطی با عرض از مبدأ -2 که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 135° می‌سازد، برابر با d باشد، آهنگ متوسط تغییر d نسبت به تغییر x در بازهٔ $[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۱۵- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+6}{x+a+1}$ در فاصلهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۶- نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-20|\sqrt[3]{x^2}$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۱۱۷- تابع $f(x)=|2x^2-1|+\sqrt{|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) سه ۲) پنج ۳) هفت ۴) نُه

۱۱۸- حاصل‌ضرب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6a-2x}$ برابر $6\sqrt{3}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

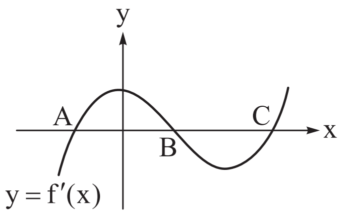
۱۱۹- اگر $f(x)=x^۳-۴x+۱$ و $g(x)=۲(۱-\cos x)(۱+\cos x)$، آن‌گاه مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=(fog)(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $۲-\frac{۱۶}{۳\sqrt{۳}}$ ۳) $۱+\frac{۱۶}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) ۱

۱۲۰- در تابع درجه‌سوم $y=f(x)$، اگر $f'(۶)=f'(-۲)$، آن‌گاه طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $y=f'(x)$ کدام است؟

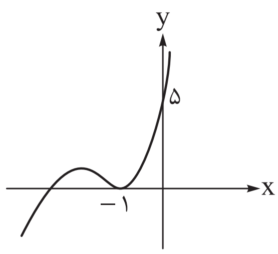
۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۱- مطابق شکل، نمودار مشتق تابع f رسم شده است. اگر $AB=BC=۳$ و فاصلهٔ بین نقاط مینیمم نسبی تابع f برابر با ۱۰ باشد، اختلاف مقادیر $f(A)$ و $f(C)$ کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۱۲۲- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است. طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) $\frac{-۱۱}{۳}$

۱۲۳- اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=\frac{x}{x^۲+x+۱}$، آن‌گاه تابع $f.g$ فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی خواهد داشت؛ طول این نقطه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۲۴- اگر $M(۲,۳)$ نقطهٔ اکسترمم تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+\frac{b}{x-۱}$ باشد، برد تابع شامل چند عدد صحیح <u>نیست</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}(x-۱) & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$، آن‌گاه تابع fog چند ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

محل انجام محاسبات

۱۲۶- می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب‌مستطیل با قاعدهٔ مربع به حجم ۱۰ متر مکعب و در باز بسازیم. قیمت مصالح مورد نیاز کف برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و برای دیوارهای کناری ۴۰ هزار تومان است. حداقل هزینهٔ مصالح مورد نیاز برای ساخت این مخزن چند میلیون تومان است؟

۱) ۱   ۲) ۱/۲   ۳) ۱/۴   ۴) ۱/۵

۱۲۷- اگر مخروطی که فاصلهٔ رأس از نقاط محیط قاعدهٔ آن ثابت و برابر ۶ است، بیشترین مقدار حجم را داشته باشد، نسبت قطر قاعده به ارتفاع آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۱۲۸- بیشترین فاصلهٔ نقاط تابع $f(x) = x^{۳}$ و $۰ \le x \le ۱$ از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۹}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۹}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۹}$

۱۲۹- یک ضلع مستطیلی بر محور xها و دو سر ضلع دیگر آن بر نمودارهای دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{۳ - x}$ قرار دارد. اگر سطح این مستطیل در ناحیهٔ محدود به نمودارهای f، g و محور xها واقع باشد، بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۱۳۰- اگر $a + b + c = ۲$ و $ab + bc + ca = ۱$، آن‌گاه ماکزیمم $|a - b|$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

ریاضی پایه (مباحث مستقل): ریاضی (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۰

۱۳۱- فاصلهٔ نقطهٔ $(۴,۳)$ از مبدأ مختصات، چند برابر فاصلهٔ آن از نیمساز ربع اول است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۲/۵$ ۴) $۲/۵\sqrt{۲}$

۱۳۲- خط d از دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(۰,۱)$ می‌گذرد. عرض از مبدأ خط d' که در نقطهٔ A بر d عمود است، کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-۱/۵$ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۳۳- نقطهٔ A روی خط d موازی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد. اگر فاصلهٔ A از دو نقطهٔ $B(۲,۶)$ و $C(-۳,۱)$ به ترتیب $\sqrt{۱۰}$ و $۲\sqrt{۵}$ واحد باشد، عرض از مبدأ خط d کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۱۳۴- دو نقطهٔ A و B را واقع بر محور xها در نظر بگیرید. اگر فاصلهٔ هر کدام از آن‌ها از خط $x+1=0$، دو برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(2,-1)$ باشد، جزء صحیح طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۵- دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع روی محور yها و یک رأس آن روی محور xها قرار دارد. اگر طول نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های این مثلث برابر ۲ باشد، محیط آن کدام است؟

۱) $8\sqrt{3}$ ۲) $9\sqrt{3}$ ۳) $12\sqrt{3}$ ۴) $16\sqrt{3}$

۱۳۶- دو نقطهٔ $(-1,2)$ و $(3,-1)$ دو رأس مثلثی هستند که رأس سوم آن در ناحیهٔ سوم مختصات روی خط $y=x+1$ قرار دارد. اگر مساحت این مثلث برابر ۵ باشد، عرض رأس سوم چه عددی است؟

۱) $\frac{-6}{7}$ ۲) $\frac{-1}{7}$ ۳) $\frac{-13}{7}$ ۴) -1

۱۳۷- دو رأس مربعی روی خطوط $L_1: y=\frac{3}{4}x+1$ و $L_2: 8y-6x+3=0$ قرار دارند. نسبت مساحت مربع در حالتی که دو ضلع مربع بر خط L_1 عمود باشند، به حالتی که یک قطر مربع بر این خط عمود باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{11}{5}$ ۴) $1/1\sqrt{2}$

۱۳۸- یک ضلع مستطیلی واقع بر خط $y=x-1$ و یک رأس آن نقطهٔ $(7,2)$ است. اگر طول قطر این مستطیل $\sqrt{17}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $6\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۱۳۹- مساحت متوازی‌الاضلاعی که یک رأس آن نقطهٔ $(1,2)$ و دو ضلع آن بر نمودار تابع $y=|2x-1|$ واقع است، کدام است؟

۱) ۱/۷۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲/۲۵

۱۴۰- در مثلث با رئوس $A(1,2)$، $B(0,4)$ و $C(-1,-1)$ فاصلهٔ بین پای میانه و ارتفاع وارد بر ضلع BC چند برابر $\sqrt{26}$ است؟

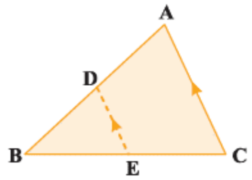
۱) $\frac{1}{13}$ ۲) $\frac{2}{13}$ ۳) $\frac{3}{13}$ ۴) $\frac{4}{13}$

محل انجام محاسبات

سؤالات ریاضی ۱۸ بهمن‌ماه ۱۴۰۲

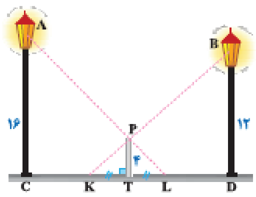
آزمون مرحله ۱۶ پایه دوازدهم

۷۱- در مثلث مقابل $DE \| AC$ و $۲BD = ۵AD$ و $DE + AC = ۲۴$ است. اندازهٔ AC کدام است؟



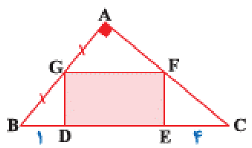
۱) ۱۱
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۴
۴) ۱۵/۵

۷۲- مطابق شکل یک میلهٔ فلزی به طول $PT = ۴m$ بین دو تیر چراغ برق به طول‌های $AC = ۱۶m$ و $BD = ۱۲m$ قرار گرفته است.
اگر فاصلهٔ دو تیر چراغ برق $۴۰m$ و سایهٔ میله در دو طرف آن به یک اندازه باشد، فاصلهٔ CT چقدر است؟



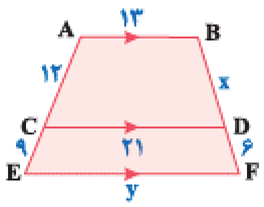
۱) ۲۲
۲) ۲۴
۳) ۲۶
۴) ۲۸

۷۳- در شکل مقابل چهارضلعی $GFDE$ یک مستطیل است. اگر $AG = GB$ ، $BD = ۱$ و $EC = ۴$ واحد باشد، محیط مستطیل $GFED$ کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

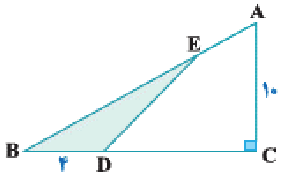
۷۴- در شکل مقابل $AB \| CD \| EF$ است. مقدار $x + y$ کدام است؟



۱) ۲۸
۲) ۳۰
۳) ۳۳
۴) ۳۵

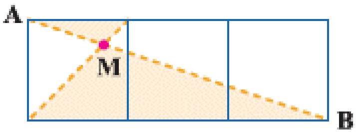
محل انجام محاسبات

۷۵- در مثلث مقابل $BE = 4AE$ و $BD = 4$ و $AC = 10$ است. مساحت مثلث BDE چقدر است؟



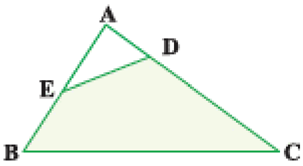
۱) ۱۴
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

۷۶- در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. فاصلهٔ MA چند برابر $\sqrt{10}$ است؟



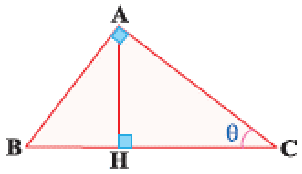
۱) $\frac{1}{3}$　۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{2}{9}$　۴) $\frac{1}{5}$

۷۷- در چهارضلعی BCDE ، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌هم‌اند. اگر $BC = 20$ و $DE = 12$، آن گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۰/۵۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۲
۴) ۰/۸

۷۸- در مثلث مقابل $A\hat{C}B = \theta$ و $BC = 2$ است. اندازهٔ ارتفاع AH کدام است؟



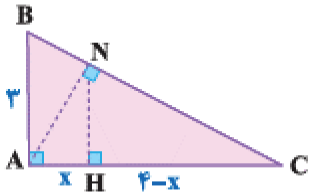
۱) $\sin^2\theta$
۲) $\sin 2\theta$
۳) $\cos^2\theta$
۴) $\cos 2\theta$

۷۹- در مستطیل به اضلاع ۱۳ و ۶ نقطهٔ M بر روی ضلع بزرگ‌تر قرار دارد و خطوط واصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عمودند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

۱) ۳　۲) ۳/۵　۳) ۴　۴) ۴/۵

محل انجام محاسبات

۸۰- مطابق شکل هر دو ارتفاع مثلث‌های قائم‌الزاویه رسم شده است. مقدار x کدام است؟

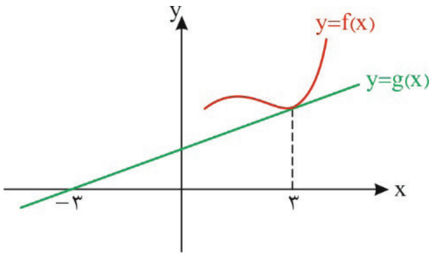


۱) ۱/۴۴
۲) ۱/۵۶
۳) ۱/۶۴
۴) ۱/۹۶

۸۱- اگر $f(۲)=۲f'(۲)=۲ , g(۲)=g'(۲)=۳$ باشد، مشتق تابع $\frac{(f+g)(x)}{x+f(x)}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۸۲- مطابق شکل، نمودار تابع خطی g بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=۳$ مماس است و $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{xf(x)+g(x)-۴}{x-۳}=a$ است. مقدار حقیقی a کدام است؟



۱) ۲
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۳}$

۸۳- در تابع چند جمله‌ای $f(x)$ اگر $f(x)+۲f'(۲x)=x^۳+۱۲x^۲+۴x+۹$ باشد، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۳۰۴- ۲) ۳۰۴ ۳) ۱۲۰- ۴) ۱۲۰

۸۴- خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}$ در نقطهٔ A به طول ۱ واقع بر آن، منحنی را در نقطهٔ دیگر B قطع می‌کند. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۴}{\sqrt{۲}}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۸۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۲x^۲+ax+۵ & ;x<۲\\ bx+a+۱ & ;x\ge ۲\end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر است. مقدار ab کدام است؟

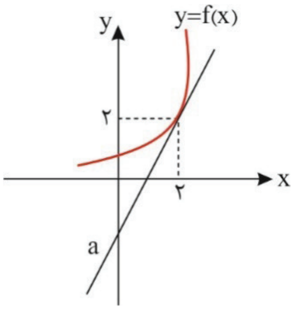
۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶- ۴) ۱۲-

محل انجام محاسبات

۸۶- اگر $f(x)=|x^{2}-3x-10|-2x^{2}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=9$ کدام است؟

۱) -7 ۲) -6 ۳) 3 ۴) 5

۸۷- نمودار تابع $y=f(x)$ و خط مماس بر آن در نقطهٔ $x=2$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=f(f(x))$ باشد و خط مماس بر نمودار تابع g محور yها را در نقطهٔ $(0,-6)$ قطع کند. مقدار a کدام است؟



۱) $1-2\sqrt{2}$

۲) -2

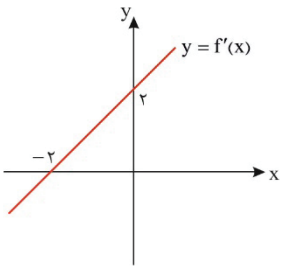
۳) $-2\sqrt{2}$

۴) $2\sqrt{5}-2$

۸۸- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{3}-\frac{3}{2}x^{2}+\frac{5x^{2}-5x}{x-1}$ در نقطه‌ای که مشتق اول از دو برابر مشتق دوم یک واحد کمتر است، به صورت $ay=bx+c$ است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) -62 ۲) 40 ۳) -124 ۴) 124

۸۹- نمودار تابع $y=f'(x)$ به صورت مقابل است. اگر $f(2)=8$ باشد، کمترین مقدار تابع f کدام است؟



۱) -2

۲) 0

۳) 2

۴) 4

۹۰- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ در بازهٔ $[a,3]$ برابر $\frac{2}{7}$ است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=a$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{5}{6}$

محل انجام محاسبات

$$\text{I)}(NH_۴)_۲Cr_۲O_۷(s) \rightarrow Cr_۲O_۳(s) + N_۲(g) + ۴H_۲O(g)$$

$$\text{II)}C_۶H_{۱۲}O_۶(aq) + ۶O_۲(g) \rightarrow ۶CO_۲(g) + ۶H_۲O(l)$$

$$\text{III)}۴NaCl(s) + ۲SO_۲(g) + O_۲(g) + ۲H_۲O(g) \xrightarrow{۱۰۰^\circ C} ۲Na_۲SO_۴(s) + ۴HCl(g)$$

بررسی موارد:

مورد اول) درست. مجموع ضرایب فراورده‌های واکنش (**III**): **۶**

ضریب استوکیومتری فراورده مایع واکنش (**II**): آب با ضریب **۶**

مورد دوم) درست. مجموع ضرایب مواد جامد واکنش **I**: **۲**

ضریب استوکیومتری ماده گازی‌شکل با اتم مرکزی گوگرد (که به هنگام سوختن رنگ شعلهٔ آبی تولید می‌کند.): **۲**

ریاضی ۳ – پیش‌روی نرمال

۱۴۱– گزینهٔ «۲» *(سهیل ساسانی)*

آهنگ متوسط حرکت در بازهٔ $[a,b]$ مساوی است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پس:

$$\frac{x(۴)-x(۲)}{۴-۲} = \frac{(۱۶+۱۲+۱)-(۴+۶+۱)}{۲} = \frac{۲۹-۱۱}{۲} = \frac{۱۸}{۲} = ۹$$

$$x'(t) = ۲t + ۳ \xrightarrow{t=۲} = ۷$$

اختلاف $\Rightarrow ۹ - ۷ = ۲$

(مشتق) *(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)*

۱۴۲– گزینهٔ «۲»

(امیرحسین نیکان)

تابع $f(x)$ در $x=۲$ باید پیوسته باشد؛ در ضابطهٔ تابع بالایی، چون مخرج کسر در $x=۲$ صفر است، پس صورت کسر هم باید به ازای $x=۲$ صفر باشد، بنابراین $۴a+b=۰$ و در نتیجه $b=-۴a$ است.

$$f(x)=\frac{ax^۲-۴a}{x-۲}=\frac{a(x^۲-۴)}{x-۲}=\frac{a(x-۲)(x+۲)}{x-۲}$$
$$=a(x+۲)=ax+۲a$$

ثانیاً مشتق در $x=۲$ باید برابر ۳ باشد:

$$ax+۲a\xrightarrow{\text{مشتق}}a=۳ \text{ و } b=-۱۲$$

$$\to f(x)=\frac{ax^۲-۴a}{x-۲}=\frac{۳x^۲-۱۲}{x-۲}=۳(x+۲)=۳x+۶$$

برای اینکه تابع f پیوسته باشد، $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)=c$ است:

$$\Rightarrow c=۱۲$$
$$\to a-b+c=۳-(-۱۲)+۱۲=۳+۱۲+۱۲=۲۷$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱۴۳– گزینهٔ «۲»

(محمدعلی جلالی)

فرض می‌کنیم:
$$g(x)=\sqrt[۳]{f(x)}$$

آن‌گاه داریم:
$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{f(x)}-\sqrt[۳]{f(-۱)}}{x-(-۱)}=g'(x)$$

از طرفی طبق قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$g'(x)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{f^۲(x)}}\times f'(x)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۴-x}{۲x+۷})^۲}}\times f'(x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=\frac{-۱۵}{(۲x+۷)^۲}}g'(x)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۴-x}{۲x+۷})^۲}}\times\frac{-۱۵}{(۲x+۷)^۲}$$

$$\xrightarrow{x=-۱}g'(-۱)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۴+۱}{-۲+۷})^۲}}\times\frac{-۱۵}{(-۲+۷)^۲}$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱}}\times\frac{-۱۵}{۲۵}=-\frac{۱}{۵}$$

روش دوم برای حل:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{f(x)}-\sqrt[۳]{f(-۱)}}{x+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{f(x)^۲}+\sqrt[۳]{f(x)\times f(-۱)}+\sqrt[۳]{f(-۱)^۲}}{\sqrt[۳]{f(x)^۲}+\sqrt[۳]{f(x)\times f(-۱)}+\sqrt[۳]{f(-۱)^۲}}$$

$$=\frac{۱}{۳}\times f'(-۱)\xrightarrow{f'(x)=\frac{-۱۵}{(۲x+۷)^۲}}\frac{۱}{۳}\times\frac{-۱۵}{۲۵}=-\frac{۱}{۵}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱۴۴– گزینهٔ «۴»

(عباس اللهی)

با توجه به‌صورت سؤال باید مقادیر مشتق راست و چپ تابع داده شده را در $x=۳$ محاسبه کنیم، ابتدا مقادیر جزء صحیح و علامت قدر مطلق را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲[x^۲]|x-۳|\xrightarrow{x=۳^+}f(x)=x^۲[۹^+](x-۳)$$
$$=۹x^۲(x-۳)=۹x^۳-۲۷x^۲\Rightarrow f'(x)=۲۷x^۲-۵۴x$$
$$\Rightarrow f'_+(۳)=۲۷(۹)-۵۴(۳)=۲۴۳-۱۶۲=۸۱$$

$$f(x)=x^۲[x^۲]|x-۳|\xrightarrow{x=۳^-}x^۲[۹^-]\times(-(x-۳))$$
$$=-۸x^۲(x-۳)=-۸x^۳+۲۴x^۲\Rightarrow f'(x)=-۲۴x^۲+۴۸x$$
$$\Rightarrow f'_-(۳)=-۲۴(۹)+۴۸(۳)=-۲۱۶+۱۴۴=-۷۲$$

در نتیجه:
$$\sqrt{f'_+(۳)+f'_-(۳)}=\sqrt{۸۱+(-۷۲)}=\sqrt{۹}=۳$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۹ تا ۸۵)

۱۴۵– گزینهٔ «۱»

(رضا علی نواز)

با محاسبه مشتق $g(x)$ داریم:

$$g'(x)=\frac{f'(x).x^۲-۲xf(x)}{x^۴}.f'(\frac{f(x)}{x^۲})$$

از طرفی $f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{x+۳}}$ است پس با جایگذاری $x=۱$ داریم:

$$g'(۱)=\frac{f'(۱).(۱)-۲f(۱)}{۱}.f'(\frac{f(۱)}{۱})=\frac{-\frac{۱}{۴}-۲(۰)}{۱}.f'(۰)$$

$$=\frac{-۱}{۴}\times\frac{-۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۸\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)

۱۴۶– گزینهٔ «۲»

(محمد ابراهیم توزنده جانی)

محورyها، محور تقارن سهمی $f(x)=۲x^۲-۳$ است. پس نقاط تماس را $A(\alpha,۲\alpha^۲-۳)$ و $B(-\alpha,۲\alpha^۲-۳)$ فرض می‌کنیم. چون مماس‌های رسم شده در این نقطه‌ها بر هم عمودند لذا: $f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-۱$

$$f'(x)=۴x\Rightarrow f'(\alpha)=۴\alpha$$
$$f'(-\alpha)=-۴\alpha$$

$$f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-۱\Rightarrow -۱۶\alpha^۲=-۱\Rightarrow \alpha=+\frac{۱}{۴}$$

$$\alpha=+\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=۲(\frac{۱}{۴})^۲-۳=\frac{۱}{۸}-۳=-\frac{۲۳}{۸}$$

$$\alpha=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=۲(-\frac{۱}{۴})^۲-۳=\frac{۱}{۸}-۳=-\frac{۲۳}{۸}$$

$$-\frac{23}{8}+(-\frac{23}{8})=-\frac{23}{4}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱۴۷- گزینهٔ «۲» (سهیل حسن خان پور)

ابتدا $f(g(2))$ را حساب می‌کنیم.

$$f(\overbrace{g(2)}^{5})=f(5)=3$$

پس حد داده شده مبهم است. اگر در مخرج از **۲** فاکتور بگیریم داریم:

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{g(f(g(x)))-g(3)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{2}g'(2)\times f'(\overbrace{g(2)}^{5})\times g'(f(\overbrace{g(2)}^{5}))$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times f'(5)\times g'(\underbrace{f(5)}_{3})=\frac{1}{4}\times 4\times g'(3)$$

$$=g'(3)=-2$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۹ و ۸۰، ۸۷ و ۸۸)

۱۴۸- گزینهٔ «۳» (عباس اشرفی)

ابتدا ضابطهٔ تابع **f** را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^2-1)+(x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-2)}=\frac{x^2-1}{(x^2-1)(x^2-2)}$$

$$+\frac{x^2-2}{(x^2-1)(x^2-2)}=\frac{1}{x^2-2}+\frac{1}{x^2-1}$$

اکنون از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-2)^2}+\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

برای یافتن مقدار مشتق دوم تابع در $x=0$ کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم.

$$f''(0)=\frac{-2}{(x^2-2)^2}+\frac{-2}{(x^2-1)^2}\Rightarrow f''(0)=\frac{-2}{4}+\frac{-2}{1}=-\frac{5}{2}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱۴۹- گزینهٔ «۲» (دانیال ابراهیمی)

ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق نقاط مشتق‌ناپذیرند. داریم:

$$x^3+mx^2+(m+3)x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x^2+mx+m+3=0\end{cases}$$

یکی از ریشه‌ها صفر است برای اینکه فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، داریم:

۱) برای عبارت درجه دوم، $\Delta\le 0$ باشد:

$$m^2-4(m+3)\le 0\Rightarrow m^2-4m-12\le 0\Rightarrow -2\le m\le 6$$

(در حالتی که $\Delta<0$ باشد، ریشه نداریم و در حالتی که $\Delta=0$ باشد، ریشه مکرر خواهیم داشت که مشتق‌پذیر است)

۲) برای عبارت درجه دوم $\Delta>0$ باشد و یکی از ریشه‌ها صفر باشد:

$$\xrightarrow{x=0}0+0+m+3=0\Rightarrow m=-3$$

مجموع مقادیر صحیح ممکن برای **m** برابر است با:

$$(-3)+(-2)+(-1)+(0)+1+2+3+4+5+6=15$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱۵۰- گزینهٔ «۳» (امیرهوشنگ انصاری)

دوره تناوب $T=4$ است؛ پس $f'_{\pm}(-7)=f'_{\pm}(-8+1)=f'_{\pm}(1)$ است.

بنابراین معادلات خطوط مماس بر منحنی را در نقطه با طول $x=1$ پیدا می‌کنیم و ۸ واحد به چپ انتقال می دهیم.

$$\begin{matrix}f(1)=1\\f'_-(1)=3\\f'_+(1)=-\frac{4}{3}\end{matrix}\Rightarrow \text{معادلات نیم‌مماس‌ها در نقطه به طول } x=1\quad\begin{cases}y=3x-2\\y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\Rightarrow x+8}\text{معادلات نیم‌مماس‌ها در نقطه به طول } x=-7\quad\begin{cases}y=3(x+8)-2\\-\frac{4}{3}(x+8)+\frac{7}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=3x+22 & \Rightarrow \text{عرض از مبدا}=22\\y=-\frac{4}{3}x-\frac{25}{3} & \Rightarrow \text{عرض از مبدا}=-\frac{25}{3}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اختلاف}}22+\frac{25}{3}=\frac{91}{3}\xrightarrow{\text{جزء صحیح}}30$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

ریاضی ۳- پیش‌روی سریع

۱۵۱- گزینهٔ «۲» (سهیل حسن خان پور)

تابع **f** روی دامنهٔ‌خود پیوسته و مشتق‌پذیر است. از صورت سوال نتیجه گرفته می‌شود که مشتق تابع **f** در $x=2$ برابر صفر است:

$$f'(x)=\frac{2x}{4}-\frac{a}{2\sqrt{x+2}}=0\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{x+2}}\Rightarrow x\sqrt{x+2}=a$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان}2}x^2(x+2)=a^2\xrightarrow{x=2}4\times 4=a^2\Rightarrow a^2=16\Rightarrow a=\pm 4$$

بررسی $a=4$:

$$x^3+2x^2=16\Rightarrow x^3+2x^2-16=(x-2)(x^2+4x+8)$$

عبارت x^2+4x+8 چون $\Delta<0$ دارد، ریشه ندارد.

X		۲	
$f'(x)$	-	0	+

تابع در $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

توجه داشته باشید که مقدار a با توجه به بازهٔ x، مثبت است و $a=-۴$ قبول نیست.

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۱۵۲- گزینهٔ «۲» (داود بوالحسنی)

$$f'(x)=۲(x-۱)\sqrt[۳]{x-a}+\frac{۱(x-۱)^۲}{۳\sqrt[۳]{(x-a)^۲}}$$

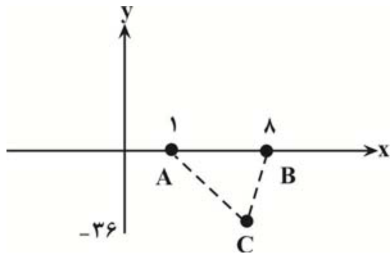
$$=\frac{۶(x-۱)(x-a)+(x-۱)^۲}{۳\sqrt[۳]{(x-a)^۲}}$$

$$=\frac{(x-۱)(۶x-۶a+x-۱)}{۳\sqrt[۳]{(x-a)^۲}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x-a=۰\Rightarrow x=a\\ ۷x-۶a-۱=۰\Rightarrow x=\dfrac{۶a+۱}{۷}=۷\\ \Rightarrow ۶a+۱=۴۹\Rightarrow ۶a=۴۸\Rightarrow a=۸\end{cases}$$

پس نقاط بحرانی عبارتند از $A=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۸\\۰\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۷\\-۳۶\end{bmatrix}$.

$$S=\frac{۱}{۲}(۳۶\times ۷)=۱۸\times ۷=۱۲۶$$

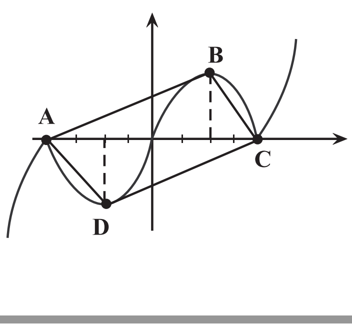


(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

۱۵۳- گزینهٔ «۲» (بابک سادات)

مطابق شکل، نمودار تابع در فاصلهٔ بین ریشه‌ها قسمتی از نمودار یک تابع درجه دوم است. نقاط Max و Min دقیقاً در وسط ریشه‌ها واقع می‌شوند و عرض آنها هم ±۴ است.

کافیست مساحت مثلث ABC را دو برابر کنیم:



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۴\times ۸}{۲}=۱۶$$

مساحت چهارضلعی ABCD: $۱۶\times ۲=۳۲$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

۱۵۴- گزینهٔ «۲» (امیرهوشنگ انصاری)

برای آنکه تکلیف $[\cos x]$ را روشن کنیم باید x را در ناحیه‌های مختلف مثلثاتی جداگانه و همچنین مرز بین ناحیه‌ها را نیز جداگانه بررسی کنیم.

$$-\frac{\pi}{۲}<x<۰\xrightarrow{[\cos x]=۰}f(x)=x^۲$$

$$x=۰\Rightarrow f(x)=-۱$$

$$۰<x<\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{[\cos x]=۰}f(x)=x^۲$$

$$x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{\pi^۲}{۴}$$

$$\frac{\pi}{۲}<x<\pi\xrightarrow{[\cos x]=-۱}f(x)=x^۲+۱$$

$$x=\pi\Rightarrow f(x)=x^۲+۱$$

$$\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}\xrightarrow{[\cos x]=-۱}f(x)=x^۲+۱$$

این تابع ماکزیمم نسبی ندارد و در $x=۰$ می‌نیمم نسبی دارد.

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

۱۵۵- گزینهٔ «۴» (سروش موئینی)

$$f(۱)=۲\Rightarrow a+\frac{b}{۲}=۲$$

$$f'(۱)=۰\Rightarrow a-\frac{b}{(۱+۱)^۲}=۰\Rightarrow b=۴a$$

$$\Rightarrow a=\frac{۲}{۳},b=\frac{۸}{۳}$$

پس داریم:

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x+\frac{\frac{۸}{۳}}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۳}-\frac{\frac{۸}{۳}}{(x+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x+۱)^۲=۴\Rightarrow x=-۳\xrightarrow{\text{جایگذاری}}y=\frac{۲}{۳}(-۳)+\frac{\frac{۸}{۳}}{-۲}$$

$$=-\frac{۶}{۳}-\frac{۴}{۳}=-\frac{۱۰}{۳}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

۱۵۶- گزینهٔ «۲» (محمدحسن سلامی حسینی)

با توجه به آزمون مشتق اول می‌دانیم که در توابع پیوسته در نقطه max نسبی، مشتق راست عددی منفی و مشتق چپ عددی مثبت است و در نقطه min نسبی، برعکس این مطلب اتفاق می‌افتد. حال با توجه به این مطلب در تابع f، نقطه $x=-۲$ نقطه max نسبی و نقطه $x=-۱$ نقطه min نسبی است.

توجه کنید که نقطهٔ min نسبی در تابع $-f(x)$ در نقطهٔ max نسبی تابع f اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$۲-x=-۲ \Rightarrow x=۴$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

۱۵۷- گزینهٔ «۲»

(عباس اشرفی)

دامنهٔ تابع $[۰,۲]$ است. روی این بازه از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)=۱-\frac{۲-۲x}{۲\sqrt{۲x-x^۲}}=۰ \Rightarrow ۱-\frac{۱-x}{\sqrt{۲x-x^۲}}=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲x-x^۲}=۱-x$$

طرفین را به توان دو می‌رسانیم.

$$۲x-x^۲=۱+x^۲-۲x \Rightarrow ۲x^۲-۴x+۱=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴\pm\sqrt{۸}}{۴}=\frac{۲\pm\sqrt{۲}}{۲}$$

با توجه به اینکه $۱-x$ باید مثبت باشد پس $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$ غیرقابل قبول است. برای یافتن مینیمم مطلق f، عرض‌های تابع را در $x=۰$، $x=۲$ و $x=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$ محاسبه می‌کنیم.

$$f(۰)=۰$$

$$f(۲)=۲$$

$$f\left(\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}\right)\xrightarrow{\sqrt{۲x-x^۲}=۱-x} x-\sqrt{۲x-x^۲}=x-(۱-x)$$

$$=۲x-۱=۲\left(\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}\right)-۱=۱-\sqrt{۲}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A\left(\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲},۱-\sqrt{۲}\right)$ را از خط $x-y=۰$ می‌یابیم.

$$AH=\frac{|x-y|}{\sqrt{۲}}=\frac{\left|\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}-(۱-\sqrt{۲})\right|}{\sqrt{۲}}=\left|\frac{\frac{۲-\sqrt{۲}-۲+۲\sqrt{۲}}{۲}}{\sqrt{۲}}\right|=\frac{۱}{۲}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱۵۸- گزینهٔ «۴»

(مهدی براتی)

با توجه به اینکه مشتق تابع f همیشه منفی است، $f'(x)=-۳x^۲-۴<۰$ این تابع اکیداً نزولی است. بنابراین برای یافتن max و min مطلق باید به ترتیب کمترین و بیشترین ورودی را برای تابع f پیدا کرد. چون ورودی تابع f خروجی تابع g است، کمترین و بیشترین خروجی g را می‌یابیم.

$$g'(x)=-۶x^۲+۱۲x=۰ \Rightarrow x=۰,x=۲$$

(نقاط بحرانی) $\underline{x\in[-۱,۲]}\quad g(۰)=-۳ \quad , \quad g(۲)=۵ \quad , \quad g(-۱)=۵$

ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع g در بازهٔ $[-۱,۲]$ به ترتیب ۵ و ۳- است.

$$fog_{\text{ماکزیمم مطلق}}=f(-۳)=-(-۳)^۳-۴(-۳)-۱۰=۲۹$$

$$fog_{\text{مینیمم مطلق}}=f(۵)=-۵^۳-۴\times۵-۱۰=-۱۵۵$$

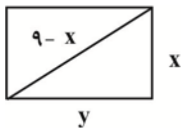
$$\Rightarrow Min+Max=-۱۵۵+۲۹=-۱۲۶$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱۵۹- گزینهٔ «۲»

(مهدی براتی)

یکی از اضلاع مستطیل را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین قطر مستطیل (وتر مثلث قائم‌الزاویه) برابر $۹-x$ است.



با توجه به رابطهٔ فیثاغورس بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$y=\sqrt{(۹-x)^۲-x^۲}=\sqrt{۸۱-۱۸x}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مساحت مستطیل}}=xy=x\sqrt{۸۱-۱۸x}$$

از رابطهٔ مساحت مستطیل مشتق می‌گیریم

$$\xrightarrow{x>۰} S=\sqrt{۸۱x^۲-۱۸x^۳}$$

(می‌توانیم فقط از عبارت زیر رادیکال مشتق بگیریم)

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} ۱۶۲x-۵۴x^۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق} \\ x=۳ & \Rightarrow y=\sqrt{۸۱-۱۸\times۳}=\sqrt{۲۷} \end{cases}$$

بیشترین مساحت مستطیل برابر است با:

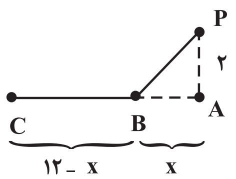
$$S=۳\sqrt{۲۷}=۹\sqrt{۳}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

۱۶۰- گزینهٔ «۳»

(دانیال ابراهیمی)

می‌دانیم که $\text{زمان}=\frac{\text{جابجایی}}{\text{سرعت}}$، اگر $AB=x$ بگیریم، داریم:



$$t_{\text{زمان کل}}=\underbrace{\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۴}}_{\text{بخش اول جابجایی}}+\underbrace{\frac{۱۲-x}{۱۲}}_{\text{بخش دوم جابجایی}}$$

برای به دست آوردن کم‌ترین زمان، مشتق عبارت را محاسبه می کنیم.

$$t'=\frac{x}{۴\sqrt{x^۲+۴}}-\frac{۱}{۱۲}=۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۲+۴}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

حداقل زمان برابر است با:

$$t_{min}=\frac{\sqrt{\frac{۱}{۲}+۴}}{۴}+\frac{۱۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱۲}=\frac{۳}{۴\sqrt{۲}}+۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲۴}=۱+\frac{۱۸-۲}{۲۴\sqrt{۲}}$$

$$=۱+\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}\simeq ۱+\frac{۱۰}{۲۱}\simeq ۱/۴۸$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

ریاضی پایه

۱۶۱- گزینهٔ «۳»
(فهیمه ولی‌زاده)

طبق قضیه تالس در ذوزنقه:

$$\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}\Rightarrow \frac{۲}{x+۲}=\frac{x-۴}{۳}\Rightarrow ۶=(x+۲)(x-۴)$$

$$\Rightarrow ۶=x^۲-۲x-۸\Rightarrow x^۲-۲x-۱۴=۰$$

$$\Delta=۴-۴(-۱۴)(۱)=۶۰$$

$$x_۱,x_۲=\frac{+۲\pm\sqrt{۶۰}}{۲}=۱\pm\sqrt{۱۵}\xrightarrow{x>۴}x=۱+\sqrt{۱۵}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

۱۶۲- گزینهٔ «۳»
(امیرحسین خسروی)

مثلث ABC متساوی الاضلاع است پس:

$$\begin{cases}\hat{B}=۶۰^\circ\\ \hat{C}=۶۰^\circ\\ AB=BC=AC=۱۲\end{cases}\Rightarrow \overbrace{BC}^{۱۲}=\overbrace{BE}^{۸}+EC\Rightarrow EC=۴$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ\\ \hat{A}_۱=\hat{E}_۱\end{matrix}\right\}\overset{\Delta}{ABE}\overset{(زز)}{\sim}\overset{\Delta}{CEF}\Rightarrow \frac{\overbrace{CE}^{۴}}{\underbrace{AB}_{۱۲}}=\frac{EF}{AE}=\frac{CF}{\underbrace{BE}_{۸}}$$

$$\frac{CE}{AB}=\frac{CF}{BE}\Rightarrow\frac{۴}{۱۲}=\frac{x}{۸}\Rightarrow x=\frac{۸}{۳}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

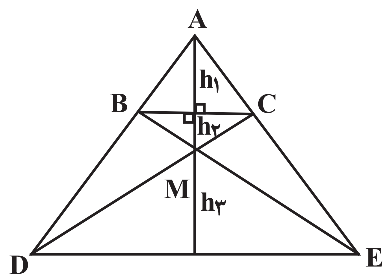
۱۶۳- گزینهٔ «۱»
(پیمان طیار)

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\alpha\Rightarrow\frac{x+y}{y}=\frac{a+b}{b}=\alpha+۱$$

$$\Rightarrow\alpha^۲+۲\alpha+۱=(\alpha+۱)^۲\Rightarrow\frac{(x+y)(a+b)}{yb}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۱۶۴- گزینهٔ «۴»
(علیرضا فیضیان)



$$BC\parallel DE\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{h_۱}{h_۱+h_۲+h_۳}=\frac{۱}{n}(۱)$$

$$\overset{\Delta}{MBC}\sim\overset{\Delta}{MDE}\Rightarrow\frac{BC}{DE}=\frac{h_۲}{h_۳}=\frac{۱}{n}$$

$$\Rightarrow h_۳=nh_۲(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{h_۱}{h_۱+h_۲+nh_۲}=\frac{۱}{n}\Rightarrow nh_۱=h_۱+h_۲+nh_۲$$

$$\Rightarrow nh_۱-h_۱=nh_۲+h_۲\Rightarrow h_۱(n-۱)=h_۲(n+۱)$$

$$\Rightarrow\frac{h_۱}{h_۲}=\frac{n+۱}{n-۱}$$

بنابراین: $\dfrac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{MBC}}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}BC.h_۱}{\frac{۱}{۲}BC.h_۲}=\dfrac{n+۱}{n-۱}$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۶)

۱۶۵- گزینهٔ «۴»
(پیمان طیار)

در مثلث $\overset{\Delta}{ACE}$ با توجه به قضیه تالس داریم:

$$BD\parallel EC\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}\Rightarrow\frac{۵-x}{۵}=\frac{BD}{۳}$$

$$\Rightarrow BD=\frac{۳}{۵}(۵-x)(۱)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم:

$$BD^۲=BC\times AB\Rightarrow BD^۲=x(۵-x)(۲)$$

با قراردادن رابطه (۱) در (۲) داریم:

$$\left(\frac{۳}{۵}(۵-x)\right)^۲=x(۵-x)\Rightarrow\frac{۹}{۲۵}(۵-x)^۲=x(۵-x)$$

$$\Rightarrow\frac{۹}{۲۵}(۵-x)=x$$

$$\Rightarrow ۴۵-۹x=۲۵x\Rightarrow ۳۴x=۴۵\to x=\frac{۴۵}{۳۴}$$

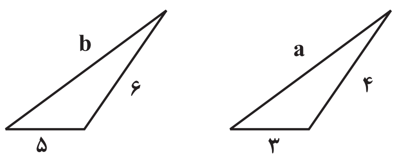
(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۶)

۱۶۶- گزینهٔ «۲»
(بابک سادات)

شرط اول این است که **b** ضلع بزرگتر مثلث دوم باشد و شرط بعد اینکه با بزرگترین ضلع ممکن از مثلث اول متناظر شود که یا **a** و یا **۴** است.

پس یکی یکی دو حالت اخیر را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: بزرگترین ضلع مثلث اولی **a** باشد:



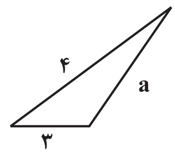
$$\Rightarrow\frac{۶}{۴}\neq\frac{۵}{۳}$$

نسبت اضلاع متناظر برابر نشد پس در این حالت دو مثلث متشابه نیستند.

حالت دوم: بزرگترین ضلع مثلث اولی ۴ باشد که خود شامل ۲ حالت مختلف دیگر است.

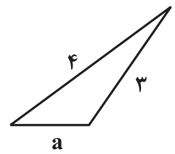
اگر $a>۳$

$$\Rightarrow k=\frac{۵}{۳}=\frac{b}{۴}=\frac{۶}{a}\Rightarrow b=\frac{۲۰}{۳}$$



اگر $a<۳$

$$\Rightarrow k=\frac{۵}{a}=\frac{b}{۴}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow b=۸$$



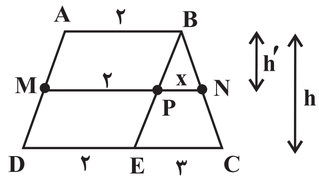
پس بیشترین مقدار b برابر ۸ است.

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱۶۷– گزینهٔ «۳»

(سروش موئینی)

با توجه به شکل روبرو داریم:



$\frac{h'}{h}=\frac{x}{۳}$: دو مثلث BNP و BCE متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABNM}=\dfrac{(۲+۲+x)h'}{۲} \\ S_{ABCD}=\dfrac{(۲+۵)h}{۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\frac{۴+x}{۷}\times\frac{x}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x=\frac{۲۱}{۲}\xrightarrow{+۴}(x+۲)^۲=\frac{۲۹}{۲}\Rightarrow x+۲=\sqrt{\frac{۲۹}{۲}}=\frac{\sqrt{۵۸}}{۲}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱۶۸– گزینهٔ «۴»

(عباس اشرفی)

در مثلث ABC داریم:

$$\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}\Rightarrow\frac{۱}{۵}=\frac{CE}{CB}\Rightarrow CE=\frac{CB}{۵}$$

در مثلث CAM داریم:

$$\frac{CF}{CM}=\frac{CD}{CA}\Rightarrow\frac{CF}{\frac{۱}{۲}BC}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow CF=\frac{BC}{۱۰}$$

در نتیجه طول EF را به صورت زیر برحسب BC محاسبه می‌کنیم:

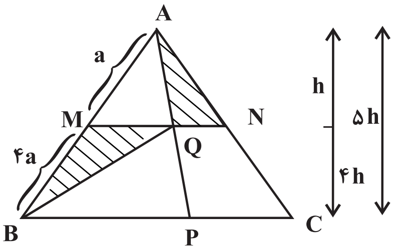
$$EF=CE-CF=\frac{BC}{۵}-\frac{BC}{۱۰}=\frac{BC}{۱۰}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۲)

۱۶۹– گزینهٔ «۴»

(محمدحسن سلامی حسینی)

در این نوع سؤالات معمولاً نسبت‌بندی در شکل، کار را سریعتر انجام می‌دهد به این صورت که با توجه به اینکه $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۴}$ است، تمام عناصر مربوط به مثلث AMN را با ضریب ۱ و عناصر مثلث ABC را با ضریب ۵ نسبت‌بندی می‌کنیم. داریم:



$$۳PC=PB\xrightarrow{\text{بدلیل تشابه}}MQ=۳QN$$

$$BC=۵b \text{ و } MN=b\begin{cases}QN=\frac{۱}{۴}b\\ MQ=\frac{۳}{۴}b\end{cases}$$

ارتفاع مثلث $ABC = ۵h$

ارتفاع مثلث $AQN = h$

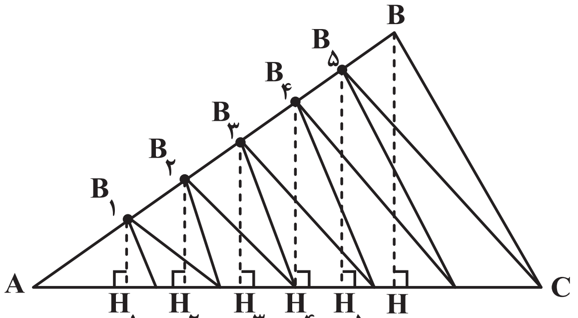
ارتفاع مثلث MQB وارد بر $MQ = ۴h$، پس:

$$\frac{S_{BMQ}}{S_{AQN}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۳}{\cancel{۴}}\cancel{b}\times۴\cancel{h}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{\cancel{۴}}\cancel{b}\times\cancel{h}}=۱۲$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های۳۳ تا ۴۶)

۱۷۰– گزینهٔ «۴»

(محمدعلی جلالی)



کافیست نسبت مساحت یکی از قسمت‌ها(سایه‌زده‌شده یا سفید) را به مساحت کل حساب کنیم. نسبت مساحت مثلث‌های سفیدرنگ به مساحت مثلث **ABC** به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} AB_۱ = B_۱B_۲ = B_۲B_۳ = B_۳B_۴ = B_۴B_۵ = B_۵B \\ B_۱H_۱ \| B_۲H_۲ \| B_۳H_۳ \| ... \| BH \quad ، BH = h \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تالس}} B_۱H_۱ = \frac{h}{۶} \text{ ، } B_۲H_۲ = \frac{۲h}{۶} \text{ ، ... ، } B_۵H_۵ = \frac{۵h}{۶}$$

$$S_{\text{سفید}} = S_{B_۱C_۱C_۲} + S_{B_۲C_۲C_۳} + ... + S_{B_۵C_۵C}$$
$$= \frac{۱}{۲}\left[m \times \frac{h}{۶} + m \times \frac{۲h}{۶} + ... + m \times \frac{۵h}{۶}\right]$$
$$= \frac{۱}{۲} m \times \frac{(۱ + ۲ + ... + ۵)h}{۶} = \frac{۱۵mh}{۱۲} = \frac{۵mh}{۴}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۶m \times h = ۳mh$$

$$S_{\text{قسمت‌هاشورخورده}} = ۳mh - \frac{۵mh}{۴} = \frac{۷mh}{۴}$$

$$\frac{S_{\text{قسمت‌هاشورخورده}}}{S_{\text{قسمت‌سفید}}} = \frac{\frac{۷mh}{۴}}{\frac{۵mh}{۴}} = \frac{۷}{۵}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

۹۹- اگر $f(x)=(x^۲+۲)^۲(x+۳)^۳$، آن‌گاه مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱۲۶۴ ۲) ۱۱۶۴ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۱۱۰۰

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=(x^۲+۲)^۲(x+۳)^۳ \Rightarrow f'(x)=۲(۲x)(x^۲+۲)(x+۳)^۳+۳(x+۳)^۲(x^۲+۲)^۲$$

$$\Rightarrow f'(۱)=۲(۲)(۳)(۶۴)+۳(۱۶)(۹)=۱۲۰۰$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۰- اگر نقطهٔ $A(۲,۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، حاصل $۲b+d$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

چون نقطهٔ $A(۲,۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، اولاً باید $f(۲)=۱$، ثانیاً باید $f'(۲)=۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)=x^۳+bx^۲+d \Rightarrow f(۲)=۱ \Rightarrow ۸+۴b+d=۱ \Rightarrow ۴b+d=-۷ \quad (۱)$$

$$f'(x)=۳x^۲+۲bx \Rightarrow f'(۲)=۰ \Rightarrow ۱۲+۴b=۰ \Rightarrow b=-۳$$

$$\xrightarrow{(۱)} -۱۲+d=-۷ \Rightarrow d=۵ \Rightarrow ۲b+d=-۶+۵=-۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^۳-۱۲x+۴$ در آن نزولی اکید است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

برای این که وضعیت یکنوایی تابع را در دامنه‌اش بررسی کنیم باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم:

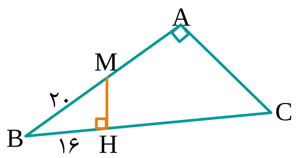
$$f(x)=x^۳-۱۲x+۴ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲$$

x	$-\infty$	-۲		۲	$+\infty$
y'	+	۰	−	۰	+
y	↗		↘		↗

تابع f در بازهٔ $(-۲,۲)$ نزولی اکید است که طول این بازه برابر ۴ است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- در مثلث شکل مقابل، از نقطهٔ M وسط ضلع AB عمود MH را بر وتر BC وارد کرده‌ایم. محیط چهارضلعی AMHC چند برابر فاصلهٔ رأس A از ضلع BC است؟ $(BH=۱۶ , BM=۲۰)$



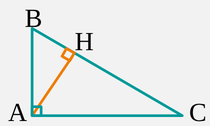
۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

نظرتون در مورد نکتهٔ زیر چیه؟

در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر برابر است با:

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}$$



پاسخ تشریحی:

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $B\overset{\triangle}{M}H$ داریم:

$$MH=\sqrt{۴۰۰-۲۵۶}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

دو مثلث $B\overset{\triangle}{M}H$ و $A\overset{\triangle}{B}C$ به حالت دو زاویه مساوی متشابهند، زیرا $\hat{B}$ در هر دو مشترک است و $\hat{H}=\hat{A}=۹۰^\circ$، بنابراین داریم:

$$A\overset{\triangle}{B}C\sim B\overset{\triangle}{M}H\Rightarrow\frac{BC}{BM}=\frac{AB}{BH}=\frac{AC}{MH}\xrightarrow{AB=۲BM=۴۰}\frac{BC}{۲۰}=\frac{۴۰}{۱۶}\Rightarrow BC=۵۰$$

$$HC=BC-BH=۵۰-۱۶=۳۴$$

در مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\triangle}{B}C$ بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC=\sqrt{۵۰^۲-۴۰^۲}=\sqrt{۲۵۰۰-۱۶۰۰}=\sqrt{۹۰۰}=۳۰$$

$$\text{محیط چهارضلعی } AMHC=۱۲+۲۰+۳۰+۳۴=۹۶$$

فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC برابر است با:

$$AH'=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۴۰\times۳۰}{۵۰}=۲۴$$

$$\frac{\text{محیط چهارضلعی } AMHC}{\text{فاصلهٔ } A \text{ از ضلع } BC}=\frac{۹۶}{۲۴}=۴$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۲۴ و ۴۰، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق برابر ۱۵۰ واحد مربع است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

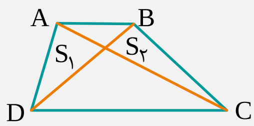
۱) ۳۲۰ ۲) ۶۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

یه نکته هم در مورد ذوزنقه ببینید!

مساحت مثلث‌های محدود به دو قطر و ساق‌های ذوزنقه با هم برابرند، پس در شکل مقابل: $S_1=S_2$

تذکر: اگر ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو مثلث مذکور با هم همنهشت‌اند.

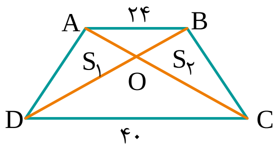


پاسخ تشریحی:

در هر ذوزنقه به شکل زیر همواره مساحت‌های مثلث‌های محدود به دو قطر و یک ساق یعنی مثلث‌های $A\overset{\triangle}{O}D$ و $B\overset{\triangle}{O}C$ با هم برابر است.

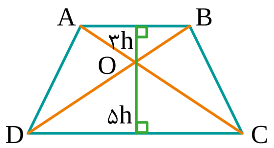
بنابراین طبق فرض مسئله:

$$S_1=S_2=۱۵۰$$



از طرفی، دو مثلث $O\overset{\triangle}{A}B$ و $D\overset{\triangle}{O}C$ با هم متشابهند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{AB}{DC}=\frac{۲۴}{۴۰}=\frac{۳}{۵}$ است، پس نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث نیز برابر نسبت تشابه است، یعنی ارتفاع‌های این دو مثلث برابر $۳h$ و $۵h$ خواهند بود.

حال کافی است مساحت ذوزنقه را از دو طریق محاسبه کنیم:



$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(۲۴+۴۰)\times۸h}{۲}=۲۵۶h$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=S_{O\overset{\triangle}{A}B}+S_{O\overset{\triangle}{C}D}+S_{O\overset{\triangle}{A}D}+S_{O\overset{\triangle}{B}C}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times۲۴\times۳h+\frac{۱}{۲}\times۴۰\times۵h+۱۵۰+۱۵۰=۱۳۶h+۳۰۰$$

$$\Rightarrow۲۵۶h=۱۳۶h+۳۰۰\Rightarrow۱۲۰h=۳۰۰\Rightarrow h=\frac{۵}{۲}$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=۲۵۶\times\frac{۵}{۲}=۶۴۰$$

گروه آموزشی ماز

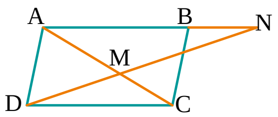
۱۰۴- در متوازی‌الاضلاع **ABCD**، از رأس **D** خطی رسم می‌کنیم تا قطر **AC** را در نقطهٔ **M** و امتداد ضلع **AB** را در نقطهٔ **N** قطع کند. اگر $\frac{AM}{AC}=\frac{۵}{۹}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{AN}{AB}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲   (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

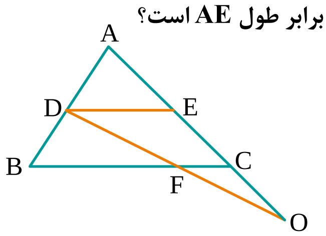
چون $AN \parallel DC$ است، پس مثلث‌های $A\hat{M}N$ و $D\hat{M}C$ متشابهند و بنابراین خواهیم داشت:



$$A\hat{M}N \sim D\hat{M}C \Rightarrow \frac{AN}{DC}=\frac{AM}{MC} \xrightarrow{AB=CD} \frac{AN}{AB}=\frac{AM}{MC} \quad (۱)$$

طبق فرض: $\frac{AM}{AC}=\frac{۵}{۹} \Rightarrow \frac{AM}{AC-AM}=\frac{۵}{۹-۵} \Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{۵}{۴} \xrightarrow{(۱)} \frac{AN}{AB}=\frac{۵}{۴}$

۱۰۵- در شکل مقابل، **DE || BC** و **D** وسط ضلع **AB** است. اگر طول **BF**، ۵ برابر طول **FC** باشد، طول **OC** چند برابر طول **AE** است؟

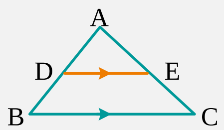


۱) ۰/۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۴
۴) ۰/۷

پاسخ: گزینه ۱   (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

حالا بریم سراغ قضیهٔ تالس و تعمیم قضیهٔ تالس:

قضیهٔ تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل زیر داشته باشیم $DE \parallel BC$، آن‌گاه: $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$



تعمیم قضیهٔ تالس: همان فرض‌های بالا اما نتیجه می‌شود $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

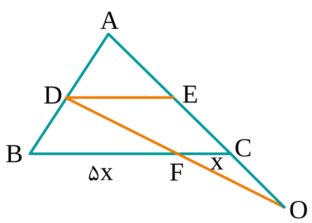
پاسخ تشریحی:

با فرض $FC=x$ خواهیم داشت: $BF=۵x$

حالا طبق قضیه تالس در مثلث $A\hat{B}C$ داریم:

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{۶x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow DE=۳x$$

و اگر قضیه تالس را در مثلث $O\hat{D}E$ بنویسیم، خواهیم داشت:

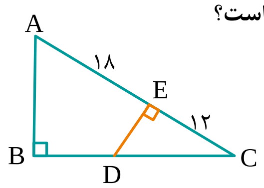


$$\frac{FC}{DE}=\frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{x}{۳x}=\frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{OC}{OE}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OE-OC}=\frac{۱}{۳-۱} \Rightarrow \frac{OC}{EC}=\frac{۱}{۲}$$

چون D وسط AB است و $DE \parallel BC$، پس E نیز وسط AC است، یعنی $AE=EC$ و در نتیجه $\frac{OC}{AE}=\frac{۱}{۲}$ است.

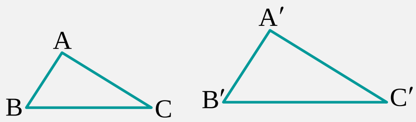
۱۰۶- در شکل مقابل، فاصلهٔ رأس E از ضلع BC برابر ۷/۲ است. اگر $AB = x$ و $BD = y$ باشد، حاصل $2x + 3y$ کدام است؟



۱) ۷۲
۲) ۴۸
۳) ۵۷
۴) ۶۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

آیا می‌دانید «انواع تشابه دو مثلث» چه می‌باشد؟



حالت‌های تشابه دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ و $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ به صورت زیر است:

الف: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه است.

$$\hat{A} = \hat{A}' \,,\, \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

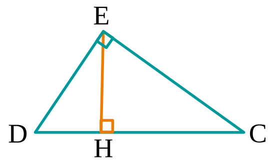
ب: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \,,\, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

ج: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

پاسخ تشریحی:



در مثلث قائم‌الزاویه $E\overset{\triangle}{D}C$ داریم:

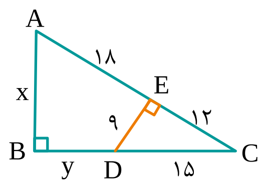
$$ED = t \,,\, DC = z \,,\, EC = ۱۲ \,,\, EH = ۷/۲ = \frac{۳۶}{۵}$$

طبق ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$EH \times DC = ED \times EC \Rightarrow z \times \frac{۳۶}{۵} = t \times ۱۲ \Rightarrow t = \frac{۳}{۵}z$$

فیثاغورس: $t^۲ + ۱۴۴ = z^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲۵}z^۲ + ۱۴۴ = z^۲ \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵}z^۲ = ۱۴۴$

$$\Rightarrow z^۲ = \frac{۲۵ \times ۱۴۴}{۱۶} \Rightarrow z = ۱۵ \Rightarrow t = \frac{۳}{۵} \times ۱۵ \Rightarrow t = ۹$$



حال با توجه به شکل مقابل، مثلث‌های $A\overset{\triangle}{B}C$ و $D\overset{\triangle}{E}C$ به حالت دو زاویه مساوی متشابهند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{C} \text{ مشترک} \\ \hat{B} = \hat{E} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim D\overset{\triangle}{E}C$$

نسبت تشابه: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{x}{۹} = \frac{۳۰}{۱۵} = \frac{y+۱۵}{۱۲}$

$$\Rightarrow x = ۱۸ \,,\, y = ۹ \Rightarrow ۲x + ۳y = ۳۶ + ۲۷ = ۶۳$$

گروه آموزشی ماز

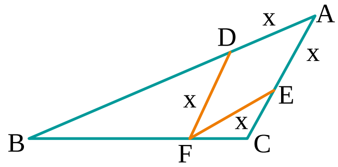
۱۰۷- در مثلث $A\hat{B}C$، اگر $AB=۲۸$ و $AC=۱۶$ و $BC=۲۰$ و نقطه‌های D و E و F به ترتیب روی اضلاع AB و AC و BC به گونه‌ای قرار دارند که چهارضلعی ADFE لوزی است. اندازهٔ FC کدام است؟

۱) $\frac{۶۰}{۹}$ ۲) $\frac{۶۰}{۱۱}$ ۳) $\frac{۸۰}{۹}$ ۴) $\frac{۸۰}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل، اگر طول ضلع لوزی ADFE را برابر x فرض کنیم با استفاده از تعمیم قضیه تالس خواهیم داشت:



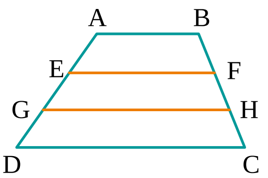
$$FE \parallel AB \Rightarrow \frac{FE}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{FC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲۸}=\frac{۱۶-x}{۱۶}=\frac{FC}{۲۰} \Rightarrow ۴۴۸-۲۸x=۱۶x \Rightarrow ۴۴x=۴۴۸ \Rightarrow x=\frac{۱۱۲}{۱۱}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۱۱۲}{۱۱}}{۲۸}=\frac{FC}{۲۰} \Rightarrow FC=\frac{۱۱۲}{۱۱\times ۲۸}\times ۲۰=\frac{۸۰}{۱۱}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۸- در شکل مقابل، پاره‌خط‌های EF و GH به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم شده‌اند و ساق‌های ذوزنقه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. اگر $GH=\frac{۵}{۴}EF$ باشد، آن‌گاه مساحت ذوزنقهٔ ABCD چند برابر مساحت ذوزنقهٔ ABFE است؟



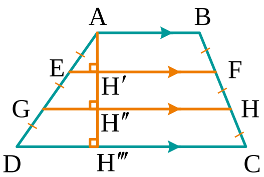
۱) $\frac{۲۹}{۷}$ ۲) $\frac{۲۷}{۷}$

۳) $\frac{۲۹}{۶}$ ۴) $\frac{۲۷}{۶}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل می‌کند، موازی دو قاعده و اندازهٔ آن برابر میانگین دو قاعده است، پس داریم:



$$GH=\frac{۵}{۴}EF$$

فرض می‌کنیم $EF=۴x$ و $GH=۵x$

$$EF=\frac{AB+GH}{۲} \Rightarrow ۴x=\frac{AB+۵x}{۲} \Rightarrow AB=۳x$$

$$GH=\frac{EF+DC}{۲} \Rightarrow ۵x=\frac{۴x+DC}{۲} \Rightarrow DC=۶x$$

چون فاصلهٔ خطوط موازی با هم برابر است، پس داریم: $AH'=H'H''=H''H'''$

و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABFE}}=\frac{\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times AH'''}{\frac{۱}{۲}(AB+EF)\times AH'}=\frac{\frac{۱}{۲}(۳x+۶x)\times ۳AH'}{\frac{۱}{۲}(۳x+۴x)AH'}=\frac{۲۷}{۷}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) مقدار ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع f در صورت وجود، منحصر به فرد است.

۲) اگر تابع f در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد، قطعاً در این بازه ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد.

۳) هر نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f قطعاً یک نقطهٔ بحرانی تابع f است.

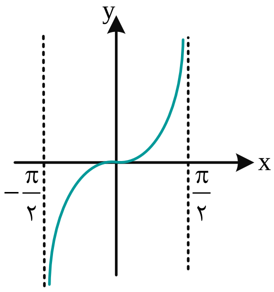
۴) اگر تابعی در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشد، آن‌گاه نقاط $x=a$ ، $x=b$ قطعاً نقاط بحرانی تابع f محسوب می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

بررسی گزینه‌ها:

۱ گزینه ۱ صحیح است، زیرا اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق باشد، فقط یک مقدار به عنوان ماکزیمم مطلق و فقط یک مقدار به عنوان مینیمم مطلق تابع خواهد بود.

۲ گزینه ۲ نادرست است، زیرا اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، قطعاً در این بازه ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد، اما اگر در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد، ممکن است در این بازه دارای ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق نباشد. به عنوان نمونه، تابع $f(x)=\tan x$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ پیوسته است، اما در این بازه ماکزیمم مطلق و همچنین مینیمم مطلق ندارد.



۳ گزینه ۳ صحیح است، زیرا در نقاط اکسترمم مطلق، مشتق یا برابر صفر است و یا موجود نیست.

۴ گزینه ۴ صحیح است، زیرا در دو نقطهٔ $x=a$ و $x=b$ مشتق تابع f موجود نیست.

گروه آموزشی ماز

۱۱۰- اگر $f(x)=\frac{۲^x\times\sqrt[۳]{x}-۲^{x+۱}}{x-۴}$ باشد، حاصل $f'(۸)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۲}{۳}$ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

عامل صفرشونده دیگه چیه؟

اگر تابع $f(x)=g(x)\times h(x)$ باشد به طوری که $h(x)$ در $x=a$ دارای مقدار صفر بوده و $g(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f'(a)$ برابر است با:

$f'(a)=h'(a)g(a)$

تذکر: به $h(x)$ در $x=a$ عامل صفرشونده می‌گوییم.

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=\frac{۲^x\times\sqrt[۳]{x}-۲^{x+۱}}{x-۴}=\frac{۲^x(\sqrt[۳]{x}-۲)}{x-۴}=(\sqrt[۳]{x}-۲)\times\frac{۲^x}{x-۴}$$

چون مقدار عبارت $(\sqrt[۳]{x}-۲)$ در نقطهٔ $x=۸$ برابر صفر می‌شود، پس به دلیل وجود عامل صفرشونده در تابع f می‌توانیم فقط مشتق عامل صفرشونده را محاسبه کنیم و آن را در سایر عوامل ضرب کنیم و مقدار عبارت را به ازای $x=۸$ به دست آوریم.

$$\text{برای نقطهٔ } x=۸ \quad f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\times\frac{۲^x}{x-۴}\Rightarrow f'(۸)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}\times\frac{۲^۸}{۴}=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۲^۸}{۴}=\frac{۱۶}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱۱- خط $y=۲x+k$ بر منحنی تابع $f(x)=x^{۲}-۲x+۲k-۱$ مماس است. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -۵ ۴) -۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

معادله خط مماس : $y=۲x+k \Rightarrow$ شیب خط مماس: $m=۲$

چون مقدار مشتق به ازای طول نقطه تماس برابر است با شیب خط مماس، پس داریم:

$f'(x)=۲x-۲ \Rightarrow ۲x-۲=۲ \Rightarrow x=۲$ طول نقطهٔ تماس

نقطهٔ تماس نقطه‌ای مشترک روی خط و منحنی است، پس باید مختصات آن، هم در خط و هم در منحنی صدق کند، بنابراین داریم:

$۴-۴+۲k-۱=۴+k \Rightarrow k=۵$

$\Rightarrow f(x)=x^{۲}-۲x+۹ \Rightarrow f'(x)=۲x-۲ \Rightarrow f'(-۲)=-۶$

شیب مماس بر منحنی در نقطه $x=-۲$: $m'=-۶$ ، مختصات نقطه تماس $A\begin{vmatrix}-۲\\۱۷\end{vmatrix}$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x=-۲$: $y-۱۷=-۶(x+۲) \Rightarrow y=-۶x+۵$

عرض از مبدأ $=۵$

گروه آموزشی ماز

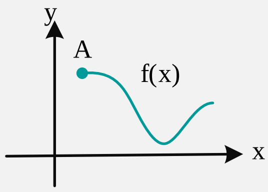
۱۱۲- در کدام‌یک از توابع زیر، هر نقطهٔ بحرانی تابع، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع است؟

۱) $f(x)=x+[x]$ ۲) $f(x)=x+|x|$ ۳) $f(x)=\sqrt{x+۳}$ ۴) $f(x)=x^{۳}+x^{۴}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

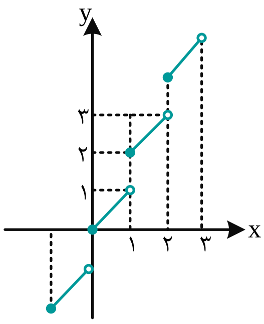
نکته‌ای بسیار مهم در مورد نقاط کناره‌ای و اکسترمم نسبی:

اگر نقطه‌ای کناره‌ای باشد، (یعنی ابتدا یا انتهای بازه باشد) و از تمام نقاط اطراف خود بیشتر و یا کمتر باشد، باز هم اکسترمم نسبی نیست، زیرا باید دارای یک همسایگی از هر دو طرف در دامنه تابع باشد. مثلاً نقطهٔ A در شکل زیر اکسترمم نسبی نیست.



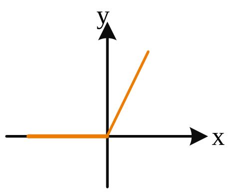
بررسی گزینه‌ها:

۱) فاقد اکسترمم نسبی است، زیرا تابع در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.



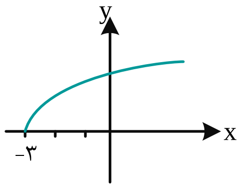
۲) تمام نقاط $x \leq ۰$ نقطهٔ بحرانی تابع هستند و این نقاط همگی اکسترمم نسبی تابع نیز هستند.

$$f(x)=x+|x|=\begin{cases}۲x & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$



زیرا نقاط $x<0$ هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی محسوب می‌شوند و نقطهٔ $x=0$ نیز مینیمم نسبی است. پس تمام نقاط بحرانی، اکسترمم نسبی تابع هستند.

۳) فاقد اکسترمم نسبی است، زیرا تابع در نقطهٔ $x=-3$ فاقد همسایگی است.



۴) دارای دو نقطهٔ بحرانی است، ولی فقط یکی از آن‌ها اکسترمم نسبی است، زیرا:

$$f(x)=x^4+x^3 \Rightarrow f'(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)=0 \Rightarrow x=0\,,\, x=-\frac{3}{4}$$

نقطهٔ $x=0$ اکسترمم نسبی نیست، زیرا مشتق تابع در طرفین این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

x		$-\frac{3}{4}$		0	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$		$\nearrow$

گروه آموزشی ماز

۱۱۳- به ازای کدام مقدار k بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$ در بازهٔ $[-2,3]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) صفر ۲) ۳۲ ۳) ۳ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k \Rightarrow f'(x)=12x^3-12x^2-24x=0$$

$$\Rightarrow 12x(x^2-x-2)=0 \Rightarrow 12x(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2, x=-1$$

$$f(-2)=48+32-48+k=32+k$$

$$f(3)=243-108-108+k=27+k$$

$$f(2)=48-32-48+k=-32+k$$

$$f(-1)=3+4-12+k=-5+k$$

$$f(0)=k$$

مطلق $\min=-32+k$ مطلق $\max=32+k$

$$\xrightarrow{\text{بنا بر فرض}}(32+k)+(-32+k)=0 \Rightarrow 2k=0 \Rightarrow k=0$$

گروه آموزشی ماز

۱۱۴- توابع $f'(x)=3x^2-66x+120$ و $g(x)=x^2-x$ مفروضند. وضعیت یکنوایی تابع fog در چند نقطه تغییر می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم برای تشخیص وضعیت یکنوایی تابع fog باید مشتق آن را تعیین علامت کنیم، برای این منظور داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))=(2x-1)f'(x^2-x)$$

$$=(2x-1)(3(x^2-x)^2-66(x^2-x)+120)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ 3(x^2-x)^2-66(x^2-x)+120=0 \Rightarrow (x^2-x)^2-22(x^2-x)+40=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow ((x^2-x)-2)((x^2-x)-20)=0 \Rightarrow (x^2-x-2)(x^2-x-20)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2\ ,\ x=-1 \\ x^2-x-20=0 \Rightarrow (x-5)(x+4)=0 \Rightarrow x=5\ ,\ x=-4 \end{cases}$$

حال با توجه به ریشه‌های به دست آمده مشتق تابع fog را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-4		-1		$\frac{1}{2}$		2		5	
$(fog)'$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
fog	↘		↗		↘		↗		↘		↗

طبق جدول، وضعیت یکنوایی تابع fog در ۵ نقطه تغییر می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۱۱۵- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x)=|x+1|+|x-4|$ نادرست هستند؟

الف: دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.

ب: تابع فاقد ماکزیمم مطلق است.

پ: تابع در ۶ نقطه با طول صحیح دارای مینیمم مطلق است.

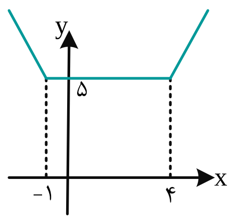
ت: مقدار مینیمم مطلق تابع برابر ۵ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار تابع f تمام گزاره‌ها صحیح هستند، زیرا تابع در بازهٔ $[-1,4]$ تابع ثابت است و مشتق تابع در تمام این نقاط برابر صفر است، پس دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.



از طرفی، چون حد تابع در $x \to \pm\infty$ برابر $+\infty$ است، پس تابع فاقد ماکزیمم مطلق است. همچنین در نقاطی با طول صحیح $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$ ، $x=2$ ، $x=3$ ، $x=4$ تابع دارای مینیمم مطلق است و از طرفی، کمترین مقدار تابع نیز برابر ۵ است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)**

واکنش کلی خوردگی آهن:

$$4Fe + 3O_2 + 6H_2O \rightarrow 4Fe(OH)_3 \sim 12e$$

$$\frac{x}{3\times 22/4} = \frac{10/2}{\underbrace{4\times 51}_{\text{تغییر جرم ناشی از تولید } Fe(OH)_3}} = \frac{x'}{12\times 6\times 10^{23}} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3/6\times 10^{23}e \\ x = 3/36 L O_2 \end{cases}$$

۱۰۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)**

با خارج شدن آب از نمونه، جرم آب و در نتیجه جرم نمونه کاهش می‌یابد ولی جرم سیلیس ثابت باقی می‌ماند. از سویی با خارج شدن آب، درصد جرمی سیلیس افزایش می‌یابد.

$$\text{جرم آب خارج‌شده} = 12g\times\frac{80}{100} = 9/6g$$

$$\text{جرم نمونهٔ باقی‌مانده} = 100 - 9/6 = 90/4g$$

$$\text{درصد جرمی سیلیس} = \frac{45/2}{90/4}\times 100 = \%50$$

۱۰۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)**

در ساخت مته و ابزار برش شیشه از الماس استفاده می‌شود. الماس نسبت به گرافیت سطح انرژی بالاتری داشته و ناپایدارتر است.

۱۰۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)**

الف) نادرست؛ هیدروژن فلوئورید یک ترکیب مولکولی است و می‌توان از واژهٔ فرمول مولکولی برای آن استفاده کرد.

ب) درست؛ فرمول الماس، گرافیت و گرافن، $C(s)$ و جرم مولی آن‌ها برابر $12g\cdot mol^{-1}$ است.

پ) نادرست؛ در ساختار یخ هر اتم اکسیژن با دو پیوند اشتراکی به دو اتم H و با دو پیوند هیدروژنی به دو اتم H از دو مولکول دیگر آب متصل است.

ت) درست

۱۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)**

همهٔ عبارت‌ها براساس متن کتاب درسی درست است.

«ریاضی»

۱۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس‌های ۲ و ۳، فصل ۷)**

نکته: ویژگی خاصی از اعضای جامعه که بررسی و مطالعه می‌شود و از عضوی به عضو دیگر معمولاً تغییر می‌کند، متغیر نام دارد و به مقدار عددی که به آن نسبت می‌دهند، مقدار متغیر می‌گویند.

با توجه به نکته، گزینهٔ ۲ نادرست است.

۱۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۳، فصل ۷)**

نکته: دسته‌بندی کلی متغیرها به‌صورت روبه‌رو است:

- کمی
  - پیوسته
  - گسسته
- کیفی
  - ترتیبی
  - اسمی

نکته: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند.

نکته: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند.

نکته (متغیر پیوسته): متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند.

نکته (متغیر گسسته): متغیری است که پیوسته نباشد.

نکته (متغیر ترتیبی): متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد.

نکته (متغیر اسمی (غیرترتیبی)): متغیری کیفی است که ترتیبی نیست.

- **به‌عنوان مثال ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم $x^2 - x - 12 = 0$ عدد صحیح هستند و جواب‌هایش -3 و $+4$ هستند. عدد π بین -3 و 4 قرار دارد ولی معادلهٔ درجه‌دومی با ضرایب صحیح نداریم که جوابش π باشد، پس با یک متغیر کمی گسسته روبه‌رو هستیم.**
- **شیب خطوط گذرنده از نقطهٔ $(2,-3)$، هر عدد حقیقی‌ای می‌تواند باشد، پس با یک متغیر کمی پیوسته روبه‌رو هستیم.**

۱۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۷)

نکتهٔ ۱: تعداد اعضای جامعه را اندازهٔ جامعه یا حجم جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازهٔ نمونه یا حجم نمونه گویند.

نکتهٔ ۲: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب‌شده را عضو نمونه گویند، پس همیشه تعداد اعضای نمونه باید کوچک‌تر یا مساوی تعداد اعضای جامعه باشد.

باید شرط «تعداد اعضای نمونه باید کوچک‌تر یا مساوی تعداد اعضای جامعه باشد.» برقرار باشد، پس:

$$۲n^۲-۷n\le ۲۱n-۱۰ \Rightarrow ۲n^۲-۲۸n+۱۰\le ۰ \xrightarrow{\div ۲} n^۲-۱۴n+۵\le ۰ \xrightarrow{+۴۴} n^۲-۱۴n+۴۹\le ۴۴$$

$$\Rightarrow (n-۷)^۲\le ۴۴ \Rightarrow |n-۷|\le\sqrt{۴۴} \Rightarrow -\sqrt{۴۴}\le n-۷\le\sqrt{۴۴} \Rightarrow \underbrace{۷-\sqrt{۴۴}}_{۰/۳}\le n\le\underbrace{۷+\sqrt{۴۴}}_{۱۳/۶}$$

از طرفی $۲n^۲-۷n$ و $۲۱n-۱۰$ باید مثبت باشند:

$$\begin{cases} ۲n^۲-۷n>۰ \Rightarrow n(۲n-۷)>۰ \Rightarrow n>۳/۵ \text{ یا } n<۰ \\ ۲۱n-۱۰>۰ \Rightarrow n>\dfrac{۱۰}{۲۱} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} n>۳/۵$$

از اشتراک $n>۳/۵$ و $۰/۳\le n\le ۱۳/۶$ به $۳/۵<n\le ۱۳/۷$ می‌رسیم.

پس مقادیر طبیعی، که n می‌تواند بگیرد، ۴، ۵، ۶، ... و ۱۳ هستند که شامل ۱۰ عدد می‌شود.

۱۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب‌شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم مـی‌کننـد. بدیهی است چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با $Q_۱$ و چارک سوم را با $Q_۳$ نمایش می‌دهند.

ابتدا داده‌ها را از کم به زیاد مرتب می‌کنیم:

$$۱,۱,۲,۳,۳,۳,۴,۴,۵,۶,۶,۷,۷,۸$$

تعداد داده‌ها ۱۴ است، پس:

$$Q_۱=۳ \ , \ Q_۳=۶$$

این دو داده را حذف می‌کنیم و تعداد داده‌های جدید ۱۲ است. به‌طوری که برای داده‌های جدید داریم:

$$۱,۱,۲,۳,۳,۴,۴,۵,۶,۷,۷,۸ \Rightarrow Q_۱=۲/۵ \ , \ Q_۳=۶/۵$$

پس اختلاف چارک اول و چارک سوم داده‌های جدید برابر ۴ خواهد شد.

۱۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: ضریب تغییرات که با CV نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف‌معیار به میانگین ($CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$) است.

نکته: اگر هریک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آن‌ها تغییر نخواهد کرد.

نکته: اگر هریک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آن‌ها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد.

وقتی به هر کدام از داده‌ها ۲ واحد اضافه می‌کنیم، به میانگین آن‌ها ۲ واحد اضافه می‌شود ولی انحراف معیار آن‌ها تغییر نمی‌کند. بنابراین:

$$\text{ضریب تغییرات داده‌های اولیه}: CV_۱=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow ۲=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \sigma=۲\bar{x} \qquad (۱)$$

$$\text{ضریب تغییرات داده‌های جدید}: CV_۲=\frac{۱}{۲}CV_۱=۱ \Rightarrow ۱=\frac{\sigma}{\bar{x}+۲} \Rightarrow \sigma=\bar{x}+۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۲\bar{x}=\bar{x}+۲ \Rightarrow \bar{x}=۲$$

۱۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آن‌ها را واریانس می‌نامند و از نماد $\sigma^۲$ برای نمایش آن استفاده می‌شود:

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+\cdots+(x_N-\bar{x})^۲}{N}$$

نکته: ضریب تغییرات که با CV نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف‌معیار به میانگین ($CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$) است.

می‌دانیم:

$$\text{ضریب تغییرات } CV=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۱}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x}=۴$$

از طرفی:

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_{۱۰}-\bar{x})^۲}{۱۰} \Rightarrow ۱=\frac{(x_۱-۴)^۲+(x_۲-۴)^۲+\cdots+(x_{۱۰}-۴)^۲}{۱۰}$$

پس:

$$(x_۱-۴)^۲+(x_۲-۴)^۲+\cdots+(x_{۱۰}-۴)^۲=۱۰$$

۱۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آن‌ها را واریانس می‌نامند و از نماد $\sigma^۲$ برای نمایش آن استفاده می‌شود:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_N - \bar{x})^۲}{N}$$

نکته: جذر واریانس را انحراف معیار می‌گوییم و با نماد σ نمایش می‌دهیم.

۱۹ دادهٔ اولیه را به‌صورت $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۱۷}$، ۲۰ و ۳۸ در نظر می‌گیریم. انحراف‌معیارشان $\sigma = ۷$ است، پس:

$$\sigma = ۷ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴۹ \Rightarrow \frac{\overbrace{(x_۱ - ۲۹)^۲ + \cdots + (x_{۱۷} - ۲۹)^۲}^{A} + (۲۰ - ۲۹)^۲ + (۳۸ - ۲۹)^۲}{۱۹} = ۴۹$$

$$\Rightarrow \frac{A + ۸۱ + ۸۱}{۱۹} = ۴۹ \Rightarrow A + ۱۶۲ = ۹۳۱ \Rightarrow A = ۷۶۹$$

میانگین داده‌های حذف‌شده $۲۹ = \frac{۲۰ + ۳۸}{۲}$ و میانگین سه دادهٔ اضافه‌شده نیز $۲۹ = \frac{۲۷ + ۲۸ + ۳۲}{۳}$ است، پس میانگین تغییری نمی‌کند.

واریانس ۲۰ دادهٔ جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - ۲۹)^۲ + \cdots + (x_{۱۷} - ۲۹)^۲ + (۲۷ - ۲۹)^۲ + (۲۸ - ۲۹)^۲ + (۳۲ - ۲۹)^۲}{۲۰} = \frac{۷۶۹ + ۴ + ۱ + ۹}{۲۰} = \frac{۷۸۳}{۲۰} = ۳۹/۱۵$$

۱۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: دامنهٔ تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با نماد R نمایش می‌دهیم.

نکته: همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد.

$$۱ - ۵ + n^۲ + ۴ + ۴ + n + n^۳ + ۱ = ۰ \Rightarrow n^۳ + n^۲ + n + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow n^۲(n + ۱) + (n + ۱) = ۰ \Rightarrow (n + ۱)(n^۲ + ۱) = ۰$$

$$\xrightarrow{n^۲ + ۱ \neq ۰} n + ۱ = ۰ \Rightarrow n = -۱$$

پس داده‌های $n^۲ - ۳n$، $۱۰ - n$، $n^۴ + ۷n^۲$ به‌صورت زیر هستند:

$n = -۱ \Rightarrow ۴, ۱۱, ۸ \Rightarrow$ دامنهٔ تغییرات $= ۱۱ - ۴ = ۷$

۱۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$

نکته: میانگین، متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_N}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

تعداد جملات اولیه را n، میانگین‌شان را $\bar{X}$ و مجموعشان را S می‌گیریم. پس داریم:

$$\bar{X} = \frac{S}{n}$$

حالا به جملات ۱، ۲، ۳، ... و n واحد اضافه می‌کنیم، پس به مجموعشان $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$ واحد اضافه می‌شود:

$$S_{\text{جدید}} = S_{\text{اولیه}} + ۱ + ۲ + \cdots + n = S_{\text{اولیه}} + \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

از آنجا که تعداد داده‌ها تغییری نکرده، میانگین جدید برابر است با:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{S_{\text{جدید}}}{n} = \frac{S + \frac{n(n + ۱)}{۲}}{n} = \frac{S}{n} + \frac{n + ۱}{۲} = \bar{x}_{\text{اولیه}} + \frac{n + ۱}{۲} \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \bar{x}_{\text{اولیه}} + \frac{n + ۱}{۲}$$

میانگین داده‌های جدید نسبت به حالت قبل ۱۶ واحد افزایش یافته است. پس:

$$\frac{n + ۱}{۲} = ۱۶ \Rightarrow n = ۳۱$$

از طرفی میانگین اولیه، ۸ واحد از تعداد داده‌ها بیشتر بود، یعنی:

$$\bar{x} = n + ۸ = ۳۱ + ۸ = ۳۹$$

۱۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکتهٔ ۱: اگر میانگین و انحراف‌معیار داده‌های x_1، ... و x_n به‌ترتیب $\bar{x}$ و σ باشد، میانگین و انحراف معیار داده‌های ax_1+b، ... و ax_n+b به‌ترتیب $a\bar{x}+b$ و $|a|\sigma$ می‌باشد.

نکتهٔ ۲: ضریب تغییرات که با CV نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف‌معیار به میانگین ($CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$) است.

فرض کنیم میانگین و انحراف‌معیار داده‌های x_1، ... و x_{56} به‌ترتیب $\bar{x}$ و σ باشد، پس:

- میانگین و انحراف‌معیار داده‌های $2x_1-1$، $2x_2-1$، ... و $2x_{56}-1$ به‌ترتیب $2\bar{x}-1$ و 2σ می‌شود.
- میانگین و انحراف‌معیار داده‌های $\frac{x_1}{3}+2$، $\frac{x_2}{3}+2$، ... و $\frac{x_{56}}{3}+2$ به‌ترتیب $\frac{\bar{x}}{3}+2$ و $\frac{\sigma}{3}$ می‌شود.

ضریب تغییرات هر دو دسته را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_1=\frac{2\sigma}{2\bar{x}-1}$$

$$CV_2=\frac{\frac{\sigma}{3}}{\frac{\bar{x}}{3}+2}\xrightarrow[\text{ضربدر ۳}]{\text{صورت و مخرج}}\frac{\sigma}{\bar{x}+6}$$

نسبت CV_2 به CV_1، $\frac{20}{100}$ است، پس:

$$\frac{CV_2}{CV_1}=\frac{20}{100}\Rightarrow\frac{\frac{\sigma}{\bar{x}+6}}{\frac{2\sigma}{2\bar{x}-1}}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{2\bar{x}-1}{2\bar{x}+12}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 10\bar{x}-5=2\bar{x}+12\Rightarrow 8\bar{x}=17\Rightarrow\bar{x}=\frac{17}{8}$$

میانگین داده‌های دستهٔ اول برابر است با:

$$2\bar{x}-1=2(\frac{17}{8})-1=\frac{17}{4}-1=\frac{13}{4}$$

اگر میانگین‌شان را در تعدادشان که ۵۶ تا بود ضرب کنیم، مجموعشان به‌دست می‌آید:

$$\text{مجموع}=\text{تعداد}\times\text{میانگین}=56\times\frac{13}{4}=14\times13=182$$

۱۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: اگر به داده‌هایمان مقداری ثابت اضافه کنیم، σ تغییری نمی‌کند.

نکته: انحراف‌معیار داده‌های x_1، ... و x_n برابر است با:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

نکتهٔ ۲: ضریب تغییرات که با CV نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف‌معیار به میانگین ($CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$) است.

با توجه به نکته، برای ۵ عدد زوج متوالی، مقدار σ ثابت است. با توجه به رابطهٔ $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$، برای آنکه CV بیشترین مقدار ممکن شود باید $\bar{x}$ کمترین مقدار آن‌ها باشد. پس پنج عدد زوج متوالی را ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ در نظر می‌گیریم که میانگین‌شان عدد وسطی می‌شود:

$$\bar{x}=6$$

حال انحراف‌معیار را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^2=\frac{(2-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2}{5}$$

$$\Rightarrow\sigma^2=\frac{16+4+0+4+16}{5}=8\Rightarrow\sigma=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

پس بیشترین مقدار CV برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}\simeq\frac{1/41}{3}=0/47$$

۱۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)**

نکته: اگر تعدادی دادهٔ آماری برابر داشته باشیم، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات‌شان صفر است و برعکس.

واریانس پنج دادهٔ $a^2-a, a+8, b, b, b$ برابر با صفر است، پس همگی با هم برابرند. ابتدا a^2-a و $a+8$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$a^2-a=a+8 \Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow (a-4)(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-2 \end{cases}$$

b باید با $a+8$ برابر باشد، پس یا $b=4+8=12$ است یا $b=-2+8=6$. چون b نباید دورقمی باشد، پس $b=6$ قبول است.

در نتیجه هر پنج دادهٔ اولیهٔ ما ۶ بوده است. حالا عدد ۱۸ را به آن‌ها اضافه می‌کنیم:

$$6, 6, 6, 6, 6, 18$$

میانگین برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{(6\times 5)+18}{6}=5+3=8$$

حال انحراف‌معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^2=\frac{5(6-8)^2+(18-8)^2}{6}=\frac{20+100}{6}=20 \Rightarrow \sigma=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

ضریب تغییرات برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{4}\simeq\frac{2/24}{4}\simeq 0/56$$

۱۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)**

راه‌حل اول:

نکتهٔ ۱: برای محاسبهٔ چارک‌ها، مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا میانهٔ داده‌ها را به‌دست می‌آورید.

۲) برای داده‌های مرتب‌شده قبل از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک اول بنامید.

۳) برای داده‌های مرتب‌شده بعد از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک سوم بنامید.

نکتهٔ ۲: در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ (با شرط $\Delta>0$)، مجموع ریشه‌ها $S=\frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب‌شان $P=\frac{c}{a}$ است.

۲۰ جملهٔ اول دنباله به‌صورت روبه‌رو هستند:

$$t_1=2^{-4}, t_2=2^{-3}, \dots, t_{20}=2^{15}$$

جملات از کوچک به بزرگ مرتب‌اند.

میانه (چارک دوم) برابر با میانگین جملهٔ دهم و یازدهم است:

$$Q_2=\frac{t_{10}+t_{11}}{2}=\frac{2^5+2^6}{2}=2^4+2^5=48$$

نیمهٔ اول و دوم داده‌ها، هر کدام شامل ۱۰ عضو است. میانهٔ نیمهٔ اول و دوم به‌ترتیب چارک اول و سوم را به ما می‌دهد:

$$Q_1=\frac{t_5+t_6}{2}=\frac{2^0+2^1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$Q_3=\frac{t_{15}+t_{16}}{2}=\frac{2^{10}+2^{11}}{2}=2^9+2^{10}=1536$$

پس a، b و c به‌ترتیب برابر با $\frac{3}{2}$، ۴۸ و ۱۵۳۶ هستند.

معادلهٔ $2ax^2+bx-c=0$ را تشکیل می‌دهیم:

$$3x^2+48x-1536=0 \xrightarrow{\div 3} x^2+16x-512=0 \Rightarrow x_1+x_2=-16 \ , \ x_1\cdot x_2=-512$$

مجموع معکوس ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-16}{-512}=\frac{2^4}{2^9}=2^{-5}$$

راه‌حل دوم:

در معادلهٔ $۲ax^۲+bx-c=۰$ مجموع معکوس ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{x_۱+x_۲}{x_۱\cdot x_۲}=\frac{-\frac{b}{۲a}}{-\frac{c}{۲a}}=\frac{b}{c}\\ &b=Q_۲=\frac{t_{۱۰}+t_{۱۱}}{۲}\\ &c=Q_۳=\frac{t_{۱۵}+t_{۱۶}}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{b}{c}\Rightarrow \frac{t_{۱۰}+t_{۱۱}}{t_{۱۵}+t_{۱۶}}=\frac{۲^۵+۲^۶}{۲^{۱۰}+۲^{۱۱}}=\frac{۲^۵(۱+۲)}{۲^{۱۰}(۱+۲)}=۲^{-۵}$$

۱۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ✽ ریاضی ۲ (درس ۲، فصل ۷)

نکته: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با $Q_۲$ نمایش می‌دهیم.

تعداد داده‌ها ۱۸ تا است. پس میانه برابر با میانگین دادهٔ نهم و دهم است. از آنجایی که میانه با هیچ‌کدام از داده‌های اولیه برابر نیست (چون میانگین عدد طبیعی نیست)، پس چینش داده‌ها باید به یکی از دو صورت زیر باشد:

$$۱)\ \overbrace{x+۱,\dots,x+۱}^{\text{۴ تا}},\overbrace{x+۷,\dots,\underbrace{x+۷}_{\text{دادهٔ نهم}}}^{\text{۵ تا}},\overbrace{\underbrace{۴۰-۲x}_{\text{دادهٔ دهم}},\dots,۴۰-۲x}^{\text{۹ تا}}$$

$$۲)\ \overbrace{۴۰-۲x,\dots,\underbrace{۴۰-۲x}_{\text{دادهٔ نهم}}}^{\text{۹ تا}},\overbrace{\underbrace{x+۱}_{\text{دادهٔ دهم}},\dots,x+۱}^{\text{۴ تا}},\overbrace{x+۷,\dots,x+۷}^{\text{۵ تا}}$$

در هر دو حالت میانه را محاسبه می‌کنیم و برابر با ۱۷/۵ قرار می‌دهیم:

$$۱)\ Q_۲=۱۷/۵\Rightarrow \frac{\text{دادهٔ دهم}+\text{دادهٔ نهم}}{۲}=۱۷/۵\Rightarrow \frac{x+۷+۴۰-۲x}{۲}=۱۷/۵\Rightarrow ۴۷-x=۳۵\Rightarrow x=۱۲$$

$$۲)\ Q_۲=۱۷/۵\Rightarrow \frac{\text{دادهٔ دهم}+\text{دادهٔ نهم}}{۲}=۱۷/۵\Rightarrow \frac{۴۰-۲x+x+۱}{۲}=۱۷/۵\Rightarrow ۴۱-x=۳۵\Rightarrow x=۶$$

هر دو مقدار به‌دست‌آمده برای x غیرقابل‌قبول است؛ زیرا داده‌ها به‌ترتیب قرار نمی‌گیرند:

$$\text{حالت اول}\xrightarrow{x=۱۲}۱۳,\dots,۱۳,۱۹,\dots,۱۹,۱۶,\dots,۱۶\ \times \qquad \text{حالت دوم}\xrightarrow{x=۶}۲۸,\dots,۲۸,۷,\dots,۷,۱۳,\dots,۱۳\ \times$$

۱۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده ✽ ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x)=x^n$، آنگاه: $f'(x)=nx^{n-۱}$.

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه: $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$.

ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم: $f(x)=x^۲-۴x+۴\Rightarrow f'(x)=۲x-۴$

اکنون معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$f(x)=۲f'(x)\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۲(۲x-۴)\Rightarrow x^۲-۸x+۱۲=۰\Rightarrow (x-۶)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۶\ ,\ x=۲$$

با توجه به گزینه‌ها، $x=۶$ جواب سؤال است.

۱۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده ✽ ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست:

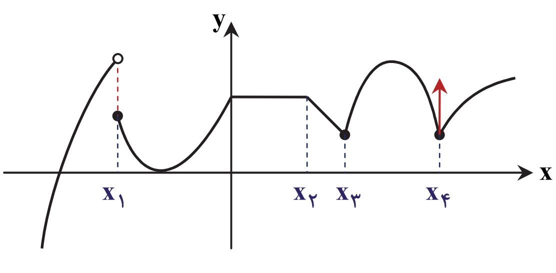
۱) f در a پیوسته نباشد.

۲) f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.



تابع f در ۵ نقطه به طول‌های $x_۱,۰,x_۲,x_۳,x_۴$ مشتق ندارد؛ زیرا

تابع در $x_۱$ ناپیوسته است.

نقاط به‌طول $x=۰$، $x_۲$ و $x_۳$ نقطه گوشه‌ای هستند و مشتق راست و چپ نابرابرند.

همچنین در نقطه به طول $x_۴$ مشتق راست و چپ نامتناهی هستند. (مماس قائم)

۱۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه:

$$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^۲} \quad ، g(a) \neq ۰$$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > ۰$، آنگاه:

$$f'(x) = \frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{۴x+۱})'(x^۳ - ۲x - ۵) - (x^۳ - ۲x - ۵)'(\sqrt{۴x+۱})}{(x^۳ - ۲x - ۵)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}})(x^۳ - ۲x - ۵) - (۳x^۲ - ۲)(\sqrt{۴x+۱})}{(x^۳ - ۲x - ۵)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{(\frac{۴}{۲\sqrt{۹}} \times -۱) - (۱۰ \times \sqrt{۹})}{(-۱)^۲} = -\frac{۲}{۳} - ۳۰ = -\frac{۹۲}{۳}$$

۱۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \to +\infty} (ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k) = \lim_{x \to +\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n$$

می‌دانیم $[x]$ جزء صحیح عدد x است. اگر $۰ \leq P < ۱$، آنگاه: $x = [x] + P$ بنابراین $[x] = x - P$ است. اکنون حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{۳x + x - P}{\sqrt{۴x^۲(۱ + \frac{۱}{۴x})} + \sqrt[۳]{x^۳(۱ - \frac{۱}{x^۲})}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۴x}{|۲x| + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۴x}{-۲x + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۴x}{-x} = -۴$$

راه‌حل دوم:

نکته: وقتی $x \to \infty$، آنگاه: $[x] \sim x$.

با استفاده از هم‌ارزی پرتوان داریم:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{۳x + x}{\sqrt{۴x^۲} + \sqrt[۳]{x^۳}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۴x}{|۲x| + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۴x}{-x} = -۴$$

۱۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \to +\infty} (ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k) = \lim_{x \to +\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n$$

نکته (قضیه): فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

الف) $\lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$

ب) $\lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ۳x + ۲) = \lim_{x \to \infty} (\frac{۲x^۲ - bx}{ax + ۳} - ۳x + ۲) = \lim_{x \to \infty} (\frac{۲x^۲ - bx - ۳ax^۲ - ۹x + ۲ax + ۶}{ax + ۳})$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(۲ - ۳a)x^۲ + (-b - ۹ + ۲a)x + ۶}{ax + ۳} = ۰$$

حاصل حد برابر صفر شده است، پس باید درجهٔ مخرج از صورت بیشتر باشد. چون مخرج درجهٔ اول است، باید در صورت فقط عدد وجود داشته باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} ۲ - ۳a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳} \\ -b - ۹ + ۲a = ۰ \Rightarrow -b - ۹ + \frac{۴}{۳} = ۰ \Rightarrow b = -\frac{۲۳}{۳} \end{cases} \Rightarrow a - b = \frac{۲۵}{۳}$$

۱۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته (قضیه): اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای به‌طول a مشتق‌پذیر باشد، مشتق چپ و راست تابع در این نقطه برابر است.

تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس تابع f در $x=۲$ پیوسته است، بنابراین:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} ۲ax+b=۴a+b \\ f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\sqrt{۲x}=۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} ۴a+b=۲ \qquad (*)$$

اکنون مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲a & ;\ x<۲ \\ \dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x}} & ;\ x\geq ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(۲)=۲a \\ f'_+(۲)=\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۲a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{(*)} ۴(\frac{۱}{۴})+b=۲ \Rightarrow b=۱$$

۱۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

ابتدا عرض نقطه‌ای به طول $x=۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+۱}{۲-x} \Rightarrow f(۳)=\frac{۳+۱}{۲-۳}=-۴ \Rightarrow A(۳,-۴)$$

اکنون با محاسبهٔ $f'(۳)$ شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(۱)(۲-x)-(-۱)(x+۱)}{(۲-x)^۲} \Rightarrow f'(۱)=۳$$

حال معادلهٔ خط مماس را در نقطهٔ $A(۳,-۴)$ می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \xrightarrow[A(۳,-۴)]{m=۳} y+۴=۳(x-۳) \Rightarrow y=۳x-۱۳ \xrightarrow{x=۰} y=-۱۳$$

۱۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به‌طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه:

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲} \quad ,g(a)\neq ۰$$

ابتدا معادلهٔ خط AB را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A(-۱,۳) \\ B(۵,۷) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب } AB=\frac{۷-۳}{۵+۱}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}$$

خط AB در نقطه‌ای به‌طول $x=۲$ بر نمودار f مماس است. بنابراین شیب خط AB همان $f'(۲)$ است:

$$f'(۲)=\frac{۲}{۳}\ ,\ f(۲)=\frac{۲}{۳}(۲)+\frac{۱۱}{۳}=۵$$

اکنون شیب خط مماس بر تابع $y=\dfrac{x}{f(x)}$ را با محاسبهٔ مشتق آن در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{۱\times f(x)-f'(x)\cdot x}{f^۲(x)} \Rightarrow y'(۲)=\frac{f(۲)-f'(۲)\times ۲}{(f(۲))^۲}=\frac{۵-\frac{۴}{۳}}{۲۵}=\frac{۱۱}{۷۵}$$

۱۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست:

۱) f در a پیوسته نباشد.

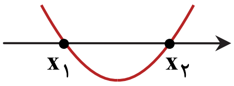
۲) f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

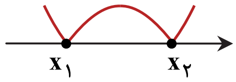
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

راه‌حل اول:

اگر نمودار تابع $y = x^2 + ax + b$ به‌صورت  باشد،

آنگاه نمودار $|x^2 + ax + b|$ به صورت  است و تابع در نقاط x_1 و x_2 مشتق‌ناپذیر است.

پس $x = 1$ و $x = a$ صفرهای متمایز تابع $y = x^2 + ax + b$ هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} = S = -a \Rightarrow 1 + a = -a \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = P = b \Rightarrow 1 \times a = b \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 4a - 2b = -1$$

راه‌حل دوم:

نکته: تابع $y = |f(x)|$، در ریشه‌های سادهٔ $f(x) = 0$، مشتق‌ناپذیر و نقطهٔ گوشه‌ای است.

$x = 1$ و $x = a$ ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند، بنابراین:

$$x^2 + ax + b = (x-1)(x-a) = x^2 + x(-1-a) + a \Rightarrow \begin{cases} -1 - a = a \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ a = b \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $4a - 2b = -1$ است.

۱۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۳ و درس ۲، فصل ۴)

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \to +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k) = \lim_{x \to +\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n$$

نکته: اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$، آنگاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

تابع f خطی است، پس وارون آن نیز یک تابع خطی است. در نتیجه $f^{-1}(x) = ax + b$. بنابراین:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{|x| f^{-1}(x) + 3}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x(ax+b) + 3}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-ax^2 - bx + 3}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-ax^2}{3x^2} = -\frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{3} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = -\frac{15}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{15}{4}x + b$$

اکنون ضابطهٔ f را به‌دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{15}{4}x + b \Rightarrow y - b = -\frac{15}{4}x \Rightarrow -\frac{4}{15}(y - b) = x$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} f(x) = -\frac{4}{15}x + \frac{4}{15}b \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{15} \Rightarrow f'(\sqrt{5}) = -\frac{4}{15}$$

۱۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه: $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ابتدا ضابطهٔ f و g را به‌دست می‌آوریم.

تابع سهمی $y = f(x)$ در $x = 3$ بر محور طول‌ها مماس است و $f(0) = 3$، پس: $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2$

تابع خطی $y = g(x)$ از مبدأ و نقطهٔ $A(6,3)$ عبور می‌کند، پس: $g(x) = \frac{1}{2}x$

اکنون مشتق تابع داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{xg(x)}{f(x)} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3} \Rightarrow y' = \frac{x(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3) - (\frac{2}{3}x - 2)(\frac{1}{2}x^2)}{(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1) = \frac{1(\frac{1}{3} - 2 + 3) - (\frac{2}{3} - 2)(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{3} - 2 + 3)^2} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{(\frac{4}{3})^2} = \frac{2}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{8}$$

۱۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)**

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\dfrac{(ax+b)[۲x]}{x^{۲}-۱}$ در $x=۲$ موجود است، پس f در $x=۲$ از چپ و راست پیوسته است و در نتیجه f در $x=۲$ پیوسته است. بنابراین:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\dfrac{(۲a+b)(۴)}{۳}\\[2mm] \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\dfrac{(۲a+b)(۳)}{۳}\end{cases}\Rightarrow (۲a+b)\times\frac{۴}{۳}=۲a+b\Rightarrow ۲a+b=۰\Rightarrow b=-۲a$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{(ax-۲a)[۲x]}{x^{۲}-۱}\Rightarrow f(۲)=۰$$

اکنون مشتق راست و چپ تابع f را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\xrightarrow{f(۲)=۰} f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{(ax-۲a)[۲x]}{(x^{۲}-۱)(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{a(x-۲)\times ۴}{(x^{۲}-۱)(x-۲)}=\frac{۴a}{۳}$$

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\xrightarrow{f(۲)=۰} f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{(ax-۲a)[۲x]}{(x^{۲}-۱)(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{a(x-۲)\times ۳}{(x^{۲}-۱)(x-۲)}=a$$

اکنون طبق فرض سؤال داریم:

$$f'_{+}(۲)-f'_{-}(۲)=-۶\Rightarrow \frac{۴a}{۳}-a=-۶\Rightarrow a=-۱۸$$

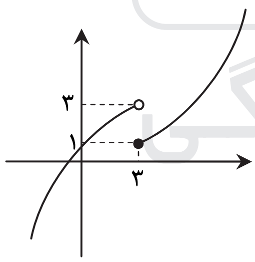
۱۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۴)**

نکته (قضیه): اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با توجه به نمودار، تابع f در $x=۳$ ناپیوسته است، ولی تابع $g(x)$ در $x=۳$ پیوسته است؛ زیرا:



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^{-}} g(x)=\dfrac{۲\times ۰}{۳}=۰\\[2mm] \lim\limits_{x\to ۳^{+}} g(x)=\dfrac{۳\times ۰}{۱}=۰\Rightarrow \text{در } x=۳ \text{ پیوسته‌است. } g(x)\\[2mm] g(۳)=\dfrac{۳\times ۰}{۱}=۰\end{cases}$$

اکنون مشتق راست و چپ تابع $g(x)$ را با استفاده از تعریف مشتق در $x=۳$ به‌دست می‌آوریم:

$$g'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{g(x)-g(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{g(x)}{x-۳}$$

$$g'_{+}(۳)=\lim_{x\to ۳^{+}}\frac{\dfrac{[x](۳-x)}{f(x)}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^{+}}\frac{-[x]}{f(x)}=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

$$g'_{-}(۳)=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{\dfrac{[x](۳-x)}{f(x)}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{-[x]}{f(x)}=\frac{-۲}{۳}=-\frac{۲}{۳}$$

پس اختلاف مشتقات چپ و راست در $x=۳$، برابر $\dfrac{۷}{۳}=\left|-\dfrac{۲}{۳}+۳\right|$ است.

۱۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار ✲ ریاضی ۳ (درس ۱، فصل ۴)**

نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با توجه به شکل، خط d در نقطهٔ $x = 2$ بر تابع f مماس است، پس شیب این خط همان $f'(2)$ است.

خط d از نقاط $(4,0)$ و $(0,3)$ عبور می‌کند، بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت $y = -\frac{3}{4}x + 3$ است. پس $f'(2) = -\frac{3}{4}$ و $f(2) = \frac{3}{2}$.

اکنون حاصل حدهای خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(2+(-h)) - f(2)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(2) = -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{4} = \frac{3}{8} = L$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f^2(x) - f^2(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \lim_{x \to 2} \frac{f(x) + f(2)}{x + 2} = f'(2) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = -\frac{9}{16} = L'$$

بنابراین:

$$L - L' = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

۱۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار ✲ ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۳)**

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \to +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k) = \lim_{x \to +\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n$$

با کمک اتحاد مزدوج حاصل را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{4x+4} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x+4} + 2\sqrt{x})}{\sqrt{4x+4} + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}(4x+4-4x)}{\sqrt{4x(1+\frac{1}{x})} + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = 1$$

پس $L = 1$ است. اکنون $f(1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(1) = (\sqrt{1})(\sqrt{4+4} - 2\sqrt{1}) = \sqrt{8} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

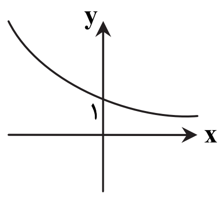
۱۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار ✲ ریاضی ۳ (درس ۲، فصل ۳)**

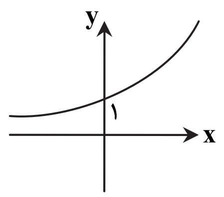
نکته (قضیه): فرض کنیم n عددی طبیعی باشد، در این صورت:

الف) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ب) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

با توجه به نمودار $y = a^x$ داریم:

$$0 < a < 1 : \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \end{cases} \qquad a > 1 : \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \end{cases}$$





اکنون حاصل حد داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2} \times 4^x - (\frac{1}{3})^x \times 3}{4^x + 3^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4^x \times \frac{1}{2}}{4^x + 3^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4^x(\frac{1}{2})}{4^x(1 + (\frac{3}{4})^x)} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید: $\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{3})^x = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} (\frac{3}{4})^x = 0$

ریاضی دوازدهم و پایهٔ مرتبط: ریاضی (۳): صفحه‌های ۹۳ تا ۱۲۰

تست و پاسخ ۱۱۱

تابع $f(x)=3x^4-x^3$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(0,\frac{1}{4})$　　۲) $(-\frac{1}{4},0)$

۳) $(-\infty,-\frac{1}{4})$　　۴) $(\frac{1}{4},+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

بعید است که سؤال کنکور به این سادگی باشد، ولی از جمله سؤالات رایج در امتحانات مدارس است.

از تابع مشتق بگیرید، هر جا $f'(x)\geq 0$ باشد، تابع صعودی است.

پیداکردن بازه‌های یکنوایی تابع f

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار آن تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، بازه‌های یکنوایی را مشخص می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول**: f' را حساب می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم.
		گام دوم: هر جا f' مثبت بود، f صعودی اکید و هر جا f' منفی بود، f نزولی اکید است.

گام اول: می‌خواهیم با استفاده از مشتق، یکنوایی تابع را بررسی کنیم، پس از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=3x^4-x^3$$
$$f'(x)=12x^3-3x^2$$

گام دوم: تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس در هر بازه‌ای که $f'\geq 0$ باشد، تابع صعودی است. کافی است f' را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x)=3x^2(4x-1)\Rightarrow \text{ریشه‌ها}:\begin{cases}x=0\\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$$

x		0		$\frac{1}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

پس تابع در بازهٔ $(\frac{1}{4},+\infty)$ صعودی است.

تست و پاسخ ۱۱۲

مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^2(x+3)+1$ در بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۵

۳) ۶　　۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

از تابع f مشتق بگیرید و ریشه‌های $f'(x)=0$ را به دست آورید.

طریقهٔ پیداکردن اکسترمم‌های مطلق در بازهٔ $[a,b]$

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار آن تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، نقاط اکسترمم مطلق را پیدا می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول:** ریشه‌های f' را در بازهٔ $[a,b]$ حساب می‌کنیم (معادلهٔ $f'=0$ را حل می‌کنیم).
		گام دوم: مقدار f را به ازای نقاط بحرانی (ریشه‌های f'، جاهایی که f' موجود نیست و نقاط ابتدا و انتهای بازه) حساب می‌کنیم.
		گام سوم: از بین مقادیر به‌دست‌آمده از گام دوم، هر کدام از بقیه بیشتر بود، max مطلق و هر کدام از بقیه کم‌تر بود، min مطلق می‌شود.

گام اول: ابتدا نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[-1,1]$ را به دست می‌آوریم. از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x)=x^3+3x^2+1$$
$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$\text{نقاط بحرانی}: f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

تنها $x=0$ در بازهٔ $[-1,1]$ است. از طرفی نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی هستند، پس سه نقطهٔ بحرانی $\{-1,0,1\}$ داریم.

گام دوم: مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم تا مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع به دست آیند.

$$f(-1)=1(-1)^3+3(-1)^2+1=3$$
$$f(0)=1$$
$$f(1)=1^3+3\times1^2+1=5$$

پس در بازهٔ $[-1,1]$، ماکزیمم تابع f برابر با ۵ و مینیمم آن برابر با یک است که مجموع آن‌ها ۶ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۱۳

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$ در بازهٔ $[1,2]$، با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه، برابر است؟

۱) $x=\dfrac{3}{2}$ ۲) $x=\sqrt{2}$ ۳) $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $x=\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,2]$ را به دست آورید و حاصل را با $f'(x)$ برابر قرار می‌دهید.

آهنگ تغییرات

۱	متوسط	آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ برابر است با: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
۲	لحظه‌ای	آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

گام اول: آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازهٔ $[1,2]$ به دست می‌آوریم.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{\frac{2^2+2}{2}-\frac{1^2+2}{1}}{1}=3-3=0$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در هر نقطه برابر با مشتق تابع در آن نقطه است؛ بنابراین باید مشتق تابع را برابر با صفر قرار دهیم.

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۲}{x}=x+\frac{۲}{x}$$

$$f'(x)=۱-\frac{۲}{x^{۲}}$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱-\frac{۲}{x^{۲}}=۰ \Rightarrow \frac{۲}{x^{۲}}=۱ \Rightarrow x^{۲}=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

تنها $x=\sqrt{۲}$ در بازهٔ $[۱,۲]$ قابل قبول است.

تست و پاسخ ۱۱۴

نقطهٔ $M(x,y)$ را بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ در نظر می‌گیریم. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از خطی با عرض از مبدأ ۲− که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد، برابر با d باشد، آهنگ متوسط تغییر d نسبت به تغییر x در بازهٔ $[\sqrt{۲}-۱,\sqrt{۲}]$ کدام است؟

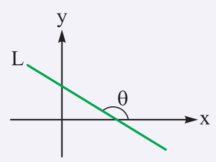
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

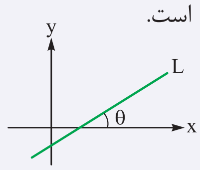
یک سؤال ترکیبی از مباحث مثلثات، هندسهٔ تحلیلی و مشتق است. بسیاری از سؤالات کنکورهای سال‌های اخیر، سؤالات ترکیبی هستند.

مختصات نقطهٔ M را به صورت $(x,x^{۲})$ در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن از خط را برحسب x بنویسید.

اگر خط L با جهت مثبت محور xها زاویهٔ θ بسازد، شیب خط برابر با $\tan\theta$ است.



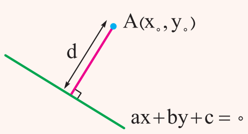
یا



شیب خط L: $m=\tan\theta$

فاصلهٔ نقطه از خط

برای به دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_{۰},y_{۰})$ از یک خط، باید معادلهٔ خط را به شکل $ax+by+c=۰$ درآوریم و بعد از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:



نقطهٔ $(x_{۰},y_{۰})$ را در سمت چپ تساوی $ax+by+c=۰$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$d=\frac{|ax_{۰}+by_{۰}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

ضریب x و y در معادلهٔ خط

گام اول: خطی که عرض از مبدأ آن $b=-۲$ است و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد را L می‌نامیم و معادلهٔ آن را می‌نویسیم. شیب این خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد؛ پس:

شیب خط: $m=\tan ۱۳۵^\circ=\tan(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan ۴۵^\circ=-۱$

معادلهٔ خط: $y=mx+b \Rightarrow y=-۱\times x-۲ \Rightarrow$ خط L: $y+x+۲=۰$

گام دوم: نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی تابع f است؛ پس مختصات آن به فرم $M(x,x^2)$ است.

گام سوم: فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,x^2)$ را از خط $y+x+2=0$ به دست آورده و برابر با d قرار می‌دهیم:

$$d=\frac{|\overbrace{x^2+x+2}^{\text{همواره}+\Leftarrow \Delta<0,\ a>0}|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow d(x)=\frac{x^2+x+2}{\sqrt{2}}$$

گام چهارم: آهنگ متوسط تغییر تابع d در بازهٔ $[\alpha,\beta]$ برابر است با:

$$\bar{d}=\frac{d(\beta)-d(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha+1)}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta+\alpha+1)$$

پس آهنگ متوسط تغییر تابع d در بازهٔ $[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}]$ برابر است با:

$$\bar{d}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1)=2$$

تست و پاسخ ۱۱۵

اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+6}{x+a+1}$ در فاصلهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

۱) ۴   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

از تابع f مشتق بگیرید و شرط $f'(x)<0$ را برقرار کنید.

گام اول: برای آن‌که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید مشتق آن منفی باشد.

$$f(x)=\frac{ax+6}{x+a+1}$$

$$f'(x)=\frac{a(x+a+1)-(ax+6)}{(x+a+1)^2}=\frac{a^2+a-6}{\underbrace{(x+a+1)^2}_{\text{همواره}\geq 0}}$$

$$f'(x)<0 \Rightarrow a^2+a-6<0 \Rightarrow (a+3)(a-2)<0 \Rightarrow -3<a<2 \quad (I)$$

گام دوم: همچنین ریشهٔ مخرج کسر، نباید در بازهٔ $(-\infty,0)$ باشد؛ پس:

ریشهٔ مخرج کسر: $x=-a-1$

$$0\leq -a-1 \Rightarrow a\leq -1 \quad (II)$$

گام سوم: بین شرط‌های (I) و (II) اشتراک می‌گیریم.

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I) و (II)}} -3<a\leq -1 \quad (*)$$

محدودهٔ $(*)$ شامل دو عدد صحیح ۱− و ۲− است.

تست و پاسخ ۱۱۶

نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-20|\sqrt[3]{x^2}$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۳۶۰   ۲) ۴۸۰   ۳) ۳۶   ۴) ۴۸

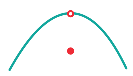
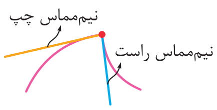
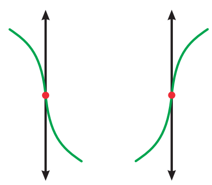
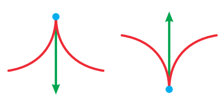
پاسخ: گزینهٔ ۲

پیدا کردن نقاط بحرانی توابع شامل قدرمطلق و رادیکال از تیپ‌های رایج این مبحث است.

ریشهٔ عبارت زیر رادیکال و ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق، طول دو نقطه از نقاط بحرانی تابع f هستند.

$\underbrace{x=c}_{c\in D_f}$ طول نقطهٔ بحرانی تابع f است، اگر $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نقاط مشتق‌ناپذیر:

اسم نقطه	توضیح	کجا می‌تواند رخ دهد؟	مثال نموداری
نقاط ناپیوستگی	هر نقطه‌ای که تابع در آن ناپیوسته باشد، قطعاً مشتق‌ناپذیر هم هست.	ریشه‌های مخرج نقاط صحیح داخل براکت مرز توابع چندضابطه‌ای	
گوشه‌ای	اولاً تابع در آن پیوسته است. ثانیاً «مشتق‌های چپ و راست، دو عدد نابرابرند.» یا «مشتق یک طرف، عدد و طرف دیگری بی‌نهایت است.»	ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق مرز توابع چندضابطه‌ای	
عطف قائم	مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های هم‌علامت هستند.	عامل صفرکنندهٔ داخل رادیکال	
بازگشتی	مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های ناهم‌علامت هستند.		

گام اول: تابع f در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال یعنی $x=0$، مشتق بی‌نهایت دارد (مشتق‌ناپذیر است)، پس $x=0$ یکی از نقاط بحرانی تابع است.

گام دوم: ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $x=20$، نقطهٔ زاویه‌دار (گوشه‌ای) است و تابع در آن مشتق‌ناپذیر است؛ پس $x=20$ هم طول یکی از نقاط بحرانی است.

گام سوم: حالا $f'(x)=0$ را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که عبارت داخل قدرمطلق چه با علامت مثبت و چه با علامت منفی از قدرمطلق خارج شود، تأثیری بر ریشهٔ $f'(x)=0$ ندارد، پس فرض می‌کنیم با علامت مثبت از قدرمطلق خارج شود.

$$f(x)=(x-20)\overbrace{\sqrt[3]{x^2}}^{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{5}{3}}-20x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{40}{3}x^{\frac{-1}{3}}=0 \Rightarrow \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{40}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow \frac{5x-40}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow 5x-40=0 \Rightarrow x=8$$

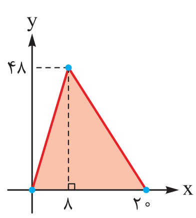
پس $x=8$ طول نقطهٔ بحرانی سوم است.

گام چهارم: عرض نقاط بحرانی را به دست آورده و این نقاط را روی دستگاه مختصات نشان می‌دهیم.

$$x=0 \Rightarrow f(0)=|0-20|\times\sqrt[3]{0^2}=0$$

$$x=20 \Rightarrow f(20)=|20-20|\times\sqrt[3]{20^2}=0$$

$$x=8 \Rightarrow f(8)=|8-20|\times\sqrt[3]{8^2}=48$$



گام پنجم: مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با $\frac{20\times 48}{2}=480$ است.

تست و پاسخ ۱۱۷

تابع $f(x)=|2x^2-1|+\sqrt{|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) سه ۲) پنج ۳) هفت ۴) نُه

پاسخ: گزینهٔ ۲

ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق، ریشهٔ عبارت زیر رادیکال و جواب‌های $f'(x)=0$ را بررسی کنید.

گام اول: ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق، طول نقاط زاویه‌دار (گوشه‌ای) هستند که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است؛ پس جزء نقاط بحرانی تابع هستند.

$$2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام دوم: مشتق در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال بی‌نهایت می‌شود (مشتق در آن وجود ندارد)، پس ریشهٔ عبارت زیر رادیکال هم جزء نقاط بحرانی است.

$$|x|=0 \Rightarrow x=0$$

گام سوم: با محدوده‌بندی بر روی x، قدرمطلق را در هر محدوده برداشته و از تابع مشتق می‌گیریم. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ سایر نقاط بحرانی را در صورت وجود مشخص خواهند کرد.

اگر $x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$: $f(x)=2x^2-1+\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{-x}}=0$

$$\Rightarrow \frac{8x\sqrt{-x}-1}{2\sqrt{-x}}=0 \Rightarrow 8x\sqrt{-x}=1 \xrightarrow{x\le 0} \text{ریشه ندارد.}$$

اگر $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x\le 0$: $f(x)=-2x^2+1+\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x)=-4x-\frac{1}{2\sqrt{-x}}=0$

$$\Rightarrow \frac{-8x\sqrt{-x}-1}{2\sqrt{-x}}=0 \Rightarrow -8x\sqrt{-x}=1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -64x^3=1 \Rightarrow x^3=-\frac{1}{64} \Rightarrow x=-\frac{1}{4}\ \checkmark$$

اگر $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$: $f(x)=-2x^2+1+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=-4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$

$$\Rightarrow \frac{-8x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow -8x\sqrt{x}=-1 \Rightarrow x\sqrt{x}=\frac{1}{8} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^3=\frac{1}{64} \Rightarrow x=\frac{1}{4}\ \checkmark$$

اگر $\frac{\sqrt{2}}{2}\le x$: $f(x)=2x^2-1+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow \frac{8x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 8x\sqrt{x}=-1 \xrightarrow{0<x}$ ریشه ندارد.

گام چهارم: پس در کل پنج نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\{-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ داریم.

تست و پاسخ ۱۱۸

حاصل‌ضرب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6a-2x}$ برابر $6\sqrt{3}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته: در سؤالات مبحث ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع، باید حواستان به دامنهٔ تابع باشد. نقاط ابتدا و انتهای دامنه جزء نقاط بحرانی تابع هستند.

از تابع f مشتق بگیرید و ریشه(های) $f'(x)=0$ را به دست آورید. حواستان به دامنهٔ تابع باشد.

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}: 0\le x\\ \sqrt{6a-2x}: 0\le 6a-2x \Rightarrow x\le 3a\end{array}\right\} \Rightarrow D_f=[0,3a]$$

گام دوم: از تابع f مشتق می‌گیریم و معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6a-2x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{6a-2x}} \xrightarrow{f'(x)=0} \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{6a-2x}}=0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{6a-2x}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج‌ها}\neq 0} 2\sqrt{x}=\sqrt{6a-2x} \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} 4x=6a-2x \Rightarrow 6x=6a \Rightarrow x=a$$

گام سوم: نقاط بحرانی تابع $x=a$، $x=0$ و $x=3a$ هستند. مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(0)=\sqrt{0}+\sqrt{6a-0}=\sqrt{6a}\\ f(a)=\sqrt{a}+\sqrt{6a-2a}=\sqrt{a}+2\sqrt{a}=3\sqrt{a} \Rightarrow \text{Max}\\ f(3a)=\sqrt{3a}+\sqrt{6a-6a}=\sqrt{3a} \Rightarrow \text{Min}\end{cases}$$

توجه کنید با توجه به دامنهٔ تابع و صورت سؤال، حتماً $a>0$ است.

گام چهارم: حاصل‌ضرب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق به‌دست‌آمده را برابر با $6\sqrt{3}$ قرار می‌دهیم.

$$\text{Max}.\text{Min}=3\sqrt{a}\times\sqrt{3a}=6\sqrt{3} \Rightarrow 3a\sqrt{3}=6\sqrt{3} \Rightarrow a=2$$

تست و پاسخ ۱۱۹

اگر $f(x)=x^3-4x+1$ و $g(x)=2(1-\cos x)(1+\cos x)$، آن‌گاه مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=(f\circ g)(x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $2-\frac{16}{3\sqrt{3}}$ ۳) $1+\frac{16}{3\sqrt{3}}$ ۴) 1

پاسخ: گزینهٔ ۲

تابع g را ساده کنید و حدود تغییرات آن را به دست آورید. حدود تغییرات $g(x)$ را به عنوان دامنهٔ تابع f فرض کنید.

گام اول: ابتدا تابع g را ساده می‌کنیم.

$$g(x)=2(1-\cos x)(1+\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x$$

گام دوم: برد تابع g را به دست می‌آوریم. توجه کنید که برای تابع $f(g(x))$، خروجی‌های تابع g، ورودی‌های تابع f خواهند بود.

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} 0\le \sin^2 x\le 1 \xrightarrow{\times 2} 0\le 2\sin^2 x\le 2$$

به عبارت دیگر ورودی‌های تابع f در بازهٔ $[0,2]$ خواهند بود.

گام سوم: حال باید Max و Min تابع f را در دامنهٔ $[0,2]$ به دست آوریم. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. برای این منظور $f'(x)$ را حساب کرده و ریشه‌های $f'(x)=0$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=x^3-4x+1$$

$$f'(x)=3x^2-4 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-4=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{3}}\\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

توجه کنید که تنها $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ در محدودهٔ $[0,2]$ قرار دارد و قابل قبول است.

گام چهارم: نقاط بحرانی تابع $x=0$ ، $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ و $x=2$ هستند. مقدار تابع f را در این نقاط به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} f(0)=1 \Rightarrow \text{Max} \\ f(\frac{2}{\sqrt{3}})=(\frac{2}{\sqrt{3}})^3-4(\frac{2}{\sqrt{3}})+1=\frac{8}{3\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{3}}+1=1-\frac{16}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Min} \\ f(2)=2^3-4(2)+1=1 \Rightarrow \text{Max} \end{cases}$$

گام پنجم: مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $fog(x)$ برابر با $2-\frac{16}{3\sqrt{3}}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۲۰

در تابع درجه‌سوم $y=f(x)$ ، اگر $f'(-2)=f'(6)$ ، آن‌گاه طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $y=f'(x)$ کدام است؟

۱) -1　　　　۲) صفر

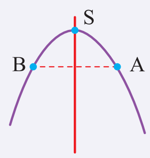
۳) ۱　　　　۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

روی اطلاعات داده‌شده و خواستهٔ سؤال تمرکز کنید. در بسیاری از سؤالات، فقط داده‌های مورد نیاز شما ارائه شده است و تمام اطلاعات داده نشده است.

تابع $f'(x)$ یک تابع درجه‌دوم است. طبق تساوی $f'(-2)=f'(6)$ ، دو نقطه به طول‌های -2 و 6 نسبت به محور تقارن سهمی f' قرینه هستند و محور تقارن سهمی طول اکسترمم نسبی سهمی را نتیجه می‌دهد.

اگر دو نقطه روی یک سهمی، عرض یکسان داشته باشند، این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی قرینه هستند؛ بنابراین میانگین طول این دو نقطه برابر با طول محور تقارن سهمی یا همان طول رأس سهمی است.



$$x_S=\frac{x_A+x_B}{2}$$

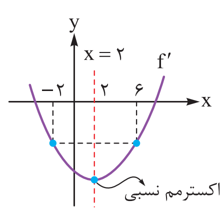
گام اول: ضابطهٔ تابع درجه‌سوم f را به صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ در نظر می‌گیریم و سپس $f'(x)$ را حساب می‌کنیم.

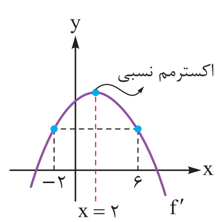
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

گام دوم: تابع f' یک تابع درجه‌دوم است. از $f'(-2)=f'(6)$ نتیجه می‌گیریم که دو نقطه به طول‌های $x=-2$ و $x=6$ روی سهمی f' ، دارای عرض‌های یکسان هستند، پس این نقاط نسبت به محور تقارن سهمی، قرینهٔ هم هستند؛ در نتیجه میانگین طول آن‌ها، معادلهٔ محور تقارن سهمی یا طول رأس سهمی را نتیجه می‌دهد.

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-2+6}{2}=2$$

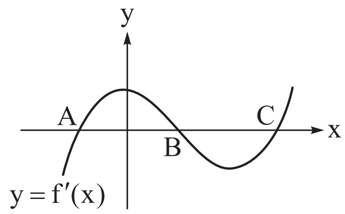
گام سوم: در تابع درجه‌دوم f' ، طول رأس سهمی همان طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است که در این‌جا $x=2$ به دست آمد.





تست و پاسخ ۱۲۱

مطابق شکل، نمودار مشتق تابع f رسم شده است. اگر $AB = BC = ۳$ و فاصلۀ بین نقاط مینیمم نسبی تابع f برابر با ۱۰ باشد، اختلاف مقادیر $f(A)$ و $f(C)$ کدام است؟



۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۲

پاسخ: گزینۀ ۱

هر جا نمودار f' محور xها را قطع می‌کند و علامت آن از منفی به مثبت تغییر می‌کند، مینیمم تابع f است.

تابع مشتق و نمودار آن

f یک تابع است. تابع مشتق (f')، تابعی است که دامنۀ آن نقاطی از دامنۀ تابع است که f در آن‌ها مشتق‌پذیر باشد.

ضابطۀ f' نیز معمولاً از فرمول‌های مشتق به دست می‌آید.

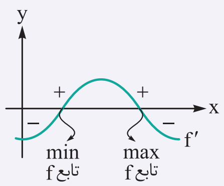
۱ اگر f در نقطه‌ای مثل $x = a$ به هر دلیلی مشتق نداشته باشد (ناپیوستگی، عدم برابری مشتق چپ و راست، بی‌نهایت‌شدن مشتق)، a عضو دامنۀ f' نبوده و نمودار تابع f' در نقطه $x = a$ تعریف نشده است.

۲ اگر f در بازه‌ای اکیداً صعودی باشد، $f' > ۰$ و نمودار f' در آن بازه، بالای محور xها است.

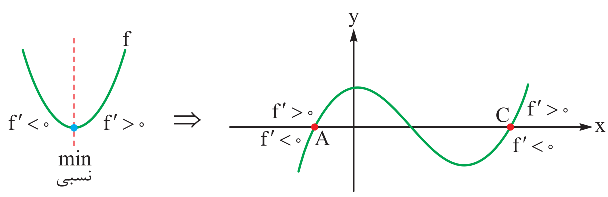
۳ گر f در بازه‌ای اکیداً نزولی باشد، $f' < ۰$ و نمودار f' در آن بازه، پایین محور xها است.

۴ اگر نمودار در نقطه‌ای مماس افقی داشته باشد، نمودار f' در آن نقطه محور xها را قطع می‌کند، چون مشتق در آن نقطه صفر می‌شود.

۵ در نقطه‌ای که f' محور xها را قطع می‌کند و علامتش از $(+)$ به $(-)$ تغییر می‌کند، تابع f دارای ماکزیمم نسبی است. اگر علامت f' از $(-)$ به $(+)$ تغییر کند، تابع f دارای مینیمم نسبی است.



گام اول: با توجه به نمودار تابع f'، از آن‌جایی که تابع در نقاط A و C از مقادیر منفی به مثبت تغییر علامت داده است؛ پس این نقاط طول نقاط مینیمم نسبی تابع f هستند.



پس نقاط مینیمم نسبی تابع f، $(A, f(A))$ و $(C, f(C))$ هستند.

گام دوم: فاصلۀ دو نقطۀ مینیمم نسبی تابع f را حساب کرده و برابر با ۱۰ قرار می‌دهیم.

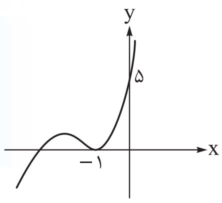
$$\sqrt{(C-A)^۲ + (f(C)-f(A))^۲} = ۱۰ \Rightarrow (C-A)^۲ + (f(C)-f(A))^۲ = ۱۰۰ \quad (۱)$$

گام سوم: طبق صورت سؤال $AB = BC = ۳$ است، پس $AC = AB + BC = ۶$ می‌شود، یعنی $C - A = ۶$ است. در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$۶^۲ + (f(C)-f(A))^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow (f(C)-f(A))^۲ = ۶۴ \Rightarrow |f(C)-f(A)| = ۸$$

تست و پاسخ ۱۲۲

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$ به شکل زیر است. طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۳}$

۲) -۲

۳) -۳

۴) $\frac{-۱۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مختصات نقاط $(۰,۵)$ و $(-۱,۰)$ در تابع f صدق می‌کنند. شرط $f'(-۱)=۰$ نیز برقرار است.

گام اول: طبق نمودار $f(۰)=۵$ است؛ پس:

$$۰^{۳}+a(۰^{۲})+b(۰)+c=۵ \Rightarrow c=۵ \Rightarrow f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+۵$$

گام دوم: همچنین طبق نمودار $f(-۱)=۰$ است؛ پس:

$$(-۱)^{۳}+a(-۱)^{۲}+b(-۱)+۵=۰ \Rightarrow -۱+a-b+۵=۰ \Rightarrow a-b=-۴ \quad (۱)$$

گام سوم: طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابعِ پیوسته و مشتق‌پذیر f برابر با $x=-۱$ است؛ پس $f'(-۱)$ باید صفر باشد، از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b$$

$$f'(-۱)=۰ \Rightarrow ۳(-۱)^{۲}+۲a(-۱)+b=۰ \Rightarrow ۳-۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a-b=۳ \quad (۲)$$

گام چهارم: معادلات (۱) و (۲) را در دستگاه حل می‌کنیم تا a و b را به دست آوریم:

$$\begin{cases} a-b=-۴ \\ ۲a-b=۳ \end{cases} \xrightarrow{\times(-۱)} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=۴ \\ ۲a-b=۳ \end{cases}$$

جمع: $a=۷,\ ۷-b=-۴ \Rightarrow b=۱۱$

در نتیجه: $f(x)=x^{۳}+۷x^{۲}+۱۱x+۵$ و $f'(x)=۳x^{۲}+۱۴x+۱۱$

گام پنجم: از معادلهٔ $f'(x)=۰$، طول اکسترمم نسبی دیگر تابع که از نوع ماکزیمم نسبی است را به دست می‌آوریم.

$$۳x^{۲}+۱۴x+۱۱=۰ \xrightarrow[x_{۱}=-۱,\ x_{۲}=-\frac{C}{A}]{B=A+C} \begin{cases} x_{۱}=-۱ \\ x_{۲}=-\frac{۱۱}{۳} \Rightarrow \text{طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی} \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۲۳

اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=\frac{x}{x^{۲}+x+۱}$، آن‌گاه تابع $f.g$ فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی خواهد داشت؛ طول این نقطه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{-۱}{۲}$

۳) ۱

۴) -۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

تابع $f.g$ را تشکیل دهید و با استفاده از مشتق‌گیری، نقطهٔ اکسترمم نسبی آن را مشخص کنید.

۱) قضایای مشتق‌گیری:

	رابطه	مثال
ضریب عددی	$a.\square \xrightarrow{\ '\ } a.\square'$	$5x^3 \xrightarrow{\ '\ } 5(3x^2)=15x^2$
جمع و تفریق	$f \pm g \xrightarrow{\ '\ } f' \pm g'$	$4x^7-\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\ '\ } 28x^6-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
ضرب	$f.g \xrightarrow{\ '\ } f'.g+f.g'$	$x^2(\sqrt{x}+1) \xrightarrow{\ '\ } 2x(\sqrt{x}+1)+x^2(\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$
تقسیم	$\dfrac{f}{g} \xrightarrow{\ '\ } \dfrac{f'.g-f.g'}{g^2}$	$\dfrac{x+4}{2x^3-1} \xrightarrow{\ '\ } \dfrac{1(2x^3-1)-6x^2(x+4)}{(2x^3-1)^2}$
ترکیب	$f(\square) \xrightarrow{\ '\ } \square'.f'(\square)$	$f(x^2+2x-3) \xrightarrow{\ '\ } (2x+2).f'(x^2+2x-3)$

۲) طریقهٔ پیداکردن اکسترمم‌های نسبی:

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، نقاط اکسترمم نسبی را پیدا می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول:** f' را حساب می‌کنیم.
		گام دوم: f' را تعیین علامت می‌کنیم: ریشه‌های f' $\begin{array}{c\|ccccccc} f' & - & \bullet & + & \bullet & - & \bullet & - \\ \hline f & \searrow & \underset{\min}{} & \nearrow & \underset{\max}{} & \searrow & & \searrow \end{array}$
		گام سوم: هر جا f' از $+$ به $-$ رفته بود، max نسبی و هر جا از $-$ به $+$ رفته بود، min نسبی داریم.

گام اول: ابتدا تابع $y=(f\times g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$y=f(x)\times g(x)=(x+a)\times\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{x^2+ax}{x^2+x+1}$$

گام دوم: مشتق y را حساب می‌کنیم.

$$y'=\frac{(2x+a)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+ax)}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow y'=\frac{\cancel{2x^3}+ax^2+2x^2+ax+2x+a-\cancel{2x^3}-x^2-2ax^2-ax}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(1-a)x^2+2x+a}{(x^2+x+1)^2}$$

گام سوم: برای آن‌که تابع فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد، باید معادلهٔ $y'=۰$ فقط یک ریشهٔ ساده داشته باشد که در آن تغییر علامت دهد؛ در نتیجه معادلهٔ $(۱-a)x^۲+۲x+a=۰$ باید از درجهٔ یک باشد و ضریب $x^۲$ باید صفر باشد؛ پس: $۱-a=۰ \Rightarrow a=۱$

$$\Rightarrow y'=\frac{۲x+۱}{(x^۲+x+۱)^۲}=۰ \Rightarrow ۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

x		$-\frac{۱}{۲}$	
y'	− ↘	min	+ ↗

توجه کنید که معادلهٔ درجه‌دو در هیچ حالتی نمی‌تواند فقط یک ریشهٔ ساده داشته باشد.

تست و پاسخ ۱۲۴

اگر $M(۲,۳)$ نقطهٔ اکسترمم تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+\frac{b}{x-۱}$ باشد، برد تابع شامل چند عدد صحیح <u>نیست</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

یکی از روش‌های به دست آوردن برد تابع، رسم نمودار تابع است. توجه کنید که در این گونه سؤالات باید یکنوایی تابع در دامنه‌اش و اکسترمم‌های آن را با استفاده از مشتق بررسی کنید.

مختصات نقطهٔ $M(۲,۳)$ در تابع f صدق می‌کند. شرط $f'(۲)=۰$ نیز برقرار است.

گام اول: مختصات نقطهٔ اکسترمم تابع در تابع صدق می‌کند، یعنی $f(۲)=۳$ است.

$$f(۲)=۲a+\frac{b}{۲-۱}=۳ \Rightarrow ۲a+b=۳ \quad (۱)$$

گام دوم: در تابع مشتق‌پذیر f، $x=۲$ طول نقطهٔ اکسترمم است؛ پس باید $f'(۲)=۰$ باشد. مشتق تابع را حساب می‌کنیم و مقدار آن را در $x=۲$ برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-۱}$$

$$f'(x)=a-\frac{b}{(x-۱)^۲} \xrightarrow{f'(۲)=۰} a-\frac{b}{(۲-۱)^۲}=۰ \Rightarrow a-b=۰ \Rightarrow a=b \quad (۲)$$

گام سوم: از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} a=b \\ ۲a+b=۳ \Rightarrow ۳a=۳ \Rightarrow a=b=۱ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$f(x)=x+\frac{۱}{x-۱}\ ,\ f'(x)=۱-\frac{۱}{(x-۱)^۲}$$

گام چهارم: ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم و سپس آن‌ها را در تابع قرار می‌دهیم تا نقاط اکسترمم نسبی تابع به دست آیند:

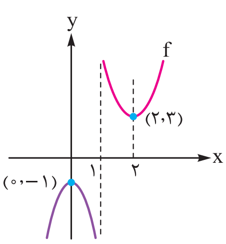
$$۱-\frac{۱}{(x-۱)^۲}=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲=۱ \Rightarrow x-۱=\pm۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow f(۲)=۳ \\ x=۰ \Rightarrow f(۰)=-۱ \end{cases}$$

گام پنجم: با تعیین علامت تابع f'، رفتار تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{x^۲-۲x}{(x-۱)^۲}$$

x		۰		۱		۲	
f'	+	۰	−	‖	−	۰	+
f	↗	max	↘	‖	↘	min	↗

گام ششم: با توجه به جدول تعیین علامت f'، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.



مطابق نمودار، برد تابع f شامل اعداد صحیح ۱، ۲ و ۰ نیست.

تست و پاسخ ۱۲۵

اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}(x-1) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$، آن‌گاه تابع fog چند ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

در توابع شامل قدر مطلق، با استفاده از تعیین علامت، قدر مطلق را حذف کنید و تابع را به صورت دو یا چند ضابطه‌ای بنویسید.

تابع fog را تشکیل دهید و نمودار آن را رسم کنید.

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده‌تر می‌نویسیم.

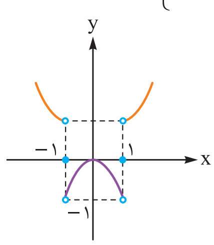
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x}(x-1)=x-1 & , 0<x\\ 0 & , x=0\\ \dfrac{-x}{x}(x-1)=-x+1 & , x<0\end{cases}$$

گام دوم: تابع fog را تشکیل می‌دهیم.

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}g(x)-1 & , 0<g(x)\\ 0 & , g(x)=0\\ -g(x)+1 & , g(x)<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}1-x^2-1=-x^2 & , \boxed{0<1-x^2} \Rightarrow \boxed{x^2<1 \Rightarrow -1<x<1}\\ 0 & , \boxed{1-x^2=0} \Rightarrow \boxed{x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1}\\ -1+x^2+1=x^2 & , \boxed{1-x^2<0} \Rightarrow \boxed{1<x^2 \Rightarrow x<-1 \text{ یا } 1<x}\end{cases}$$

گام سوم: نمودار تابع fog را رسم می‌کنیم.



گام چهارم: طبق نمودار، تابع تنها یک ماکزیمم نسبی دارد که در $x=0$ است.

تست و پاسخ ۱۲۶

می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب‌مستطیل با قاعدهٔ مربع به حجم ۱۰ متر مکعب و در باز بسازیم. قیمت مصالح مورد نیاز کف برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و برای دیوارهای کناری ۴۰ هزار تومان است. حداقل هزینهٔ مصالح مورد نیاز برای ساخت این مخزن چند میلیون تومان است؟

۱) ۱   ۲) ۱/۲

۳) ۱/۴   ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

در سؤالات بهینه‌سازی، متغیرهای سؤالات و ارتباط بین آن‌ها را خوب شناسایی کنید.

ابتدا شکل سؤال را رسم کنید و متغیرها را روی آن نشان دهید.

بهینه‌سازی

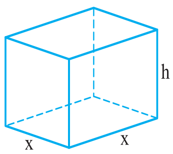
در مسائل بهینه‌سازی روال کار به صورت زیر است:

۱) در صورت امکان از مسئله، شکلی رسم کنید و متغیرها و مقادیر ثابت را مشخص کنید.

۲) کمیتی که باید بهینه شود را شناسایی کنید و رابطهٔ اصلی را برای آن بنویسید.

۳) با استفاده از رابطه(های) کمکی، رابطهٔ اصلی را تک‌متغیره کنید.

۴) از رابطهٔ اصلی که تک‌متغیره شده است مشتق بگیرید. با در نظر گرفتن دامنهٔ رابطهٔ اصلی، نقاط بحرانی آن را به دست آورید و نهایتاً مقادیر ماکزیمم یا مینیمم مطلق آن را حساب کنید.



گام اول: ابتدا شکل سؤال را رسم می‌کنیم و متغیرهای سؤال را بر روی آن نشان می‌دهیم. ضلع مربع قاعده را با x و یال دیگر مکعب‌مستطیل را h می‌نامیم.

گام دوم: می‌خواهیم هزینهٔ مصالح مورد نیاز برای ساخت این مخزن را حداقل کنیم، پس رابطهٔ اصلی در این سؤال مربوط به هزینهٔ مصالح است که آن را با C نشان می‌دهیم و برحسب هزار تومان برابر است با:

رابطهٔ اصلی: $C = (\text{قیمت مصالح کف}) + (\text{قیمت مصالح دیوارهای کناری}) = ۱۰۰x^۲ + ۴۰(۴xh) \qquad (۱)$

گام سوم: از آن‌جایی که رابطهٔ (۱) برحسب دو متغیر است، ابتدا باید با استفاده از یک رابطهٔ کمکی آن را تک‌متغیره کنیم. این رابطهٔ کمکی از حجم مخزن می‌آید که مقدار ثابت ۱۰ مترمکعب است. در واقع حجم مخزن ارتباط بین x و h را برای ما مشخص می‌کند:

رابطهٔ کمکی: $x^۲h = ۱۰ \Rightarrow h = \dfrac{۱۰}{x^۲} \qquad (۲)$

گام چهارم: از رابطهٔ (۲) مقدار h را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم تا رابطهٔ اصلی فقط برحسب x شود و بتوانیم از آن مشتق بگیریم و مینیمم آن را مشخص کنیم.

$$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} C(x) = ۱۰۰x^۲ + ۴۰(۴x \times \frac{۱۰}{x^۲}) = ۱۰۰x^۲ + \frac{۱۶۰۰}{x} \qquad (۳)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۳) مشتق می‌گیریم و ریشه‌های $C'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم.

$$C'(x) = ۲۰۰x - \frac{۱۶۰۰}{x^۲} \xrightarrow{C'(x)=۰} ۲۰۰x - \frac{۱۶۰۰}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۸}{x^۲} \xrightarrow{x \neq ۰} x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

گام ششم: با قراردادن $x = ۲$ در $C(x)$، حداقل هزینهٔ مصالح به دست می‌آید.

$C(۲) = ۱۰۰(۲)^۲ + \dfrac{۱۶۰۰}{۲} = ۴۰۰ + ۸۰۰ = ۱۲۰۰$ هزار تومان $= ۱/۲$ میلیون تومان

تست و پاسخ ۱۲۷

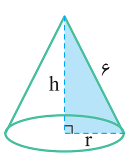
اگر مخروطی که فاصلهٔ رأس از نقاط محیط قاعدهٔ آن ثابت و برابر ۶ است، بیشترین مقدار حجم را داشته باشد، نسبت قطر قاعده به ارتفاع آن کدام است؟

مخروط قائم است و اندازهٔ مولد آن ۶ است.

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

ابتدا شکل سؤال را رسم کنید و متغیرها را بر روی آن نشان دهید.



گام اول: شکل سؤال را رسم کرده و مجهولات سؤال را روی آن نشان می‌دهیم. شعاع قاعدهٔ مخروط را r و ارتفاع آن را با h مشخص می‌کنیم.

دوازدهم تجربی

آزمون دهم حضوری

گام دوم: حجم مخروط بیشترین مقدار شده است، پس رابطهٔ اصلی در این سؤال مربوط به حجم مخروط است، آن را می‌نویسیم.

رابطهٔ اصلی: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$

گام سوم: رابطهٔ کمکی در این سؤال که ارتباط بین r و h را مشخص می‌کند، رابطهٔ فیثاغورس در مثلث رنگی شکل صفحهٔ قبل:

رابطهٔ کمکی: $r^2+h^2=6^2=36 \Rightarrow r^2=36-h^2 \qquad (2)$

گام چهارم: رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا رابطهٔ اصلی تنها برحسب h شود.

$$\xrightarrow{(1)\text{ و }(2)} V(h)=\frac{1}{3}\pi(36-h^2)h \Rightarrow V(h)=12\pi h-\frac{\pi}{3}h^3 \qquad (3)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۳) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $V'(x)=0$ را به دست می‌آوریم.

$$V'(x)=12\pi-\pi h^2 \xrightarrow{V'(x)=0} 12\pi-\pi h^2=0 \Rightarrow h^2=12 \Rightarrow h=2\sqrt{3} \xrightarrow{(2)} r^2=36-12=24 \Rightarrow r=2\sqrt{6}$$

گام ششم: خواستهٔ سؤال $\frac{2r}{h}$ است که برابر با $\frac{2\times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۲۸

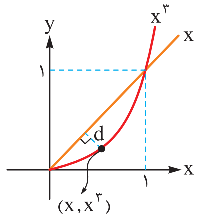
بیشترین فاصلهٔ نقاط تابع $f(x)=x^3$ و $0\le x\le 1$ از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ ۴) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

نمودار دو تابع $y=x^3$ و $y=x$ را در محدودهٔ $[0,1]$ رسم کنید. مختصات نقاط روی تابع $y=x^3$ را به صورت (x,x^3) در نظر می‌گیریم.

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم. مختصات نقطهٔ روی منحنی $y=x^3$ را به صورت (x,x^3) در نظر می‌گیریم $(0\le x\le 1)$.



گام دوم: می‌خواهیم بیشترین فاصلهٔ نقاط تابع $y=x^3$ را در محدودهٔ $0\le x\le 1$ از خط $y=x$ به دست آوریم. رابطهٔ اصلی را می‌نویسیم.

خط: $x-y=0$

رابطهٔ اصلی: $d=\frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \qquad (1)$

گام سوم: رابطهٔ کمکی در این سؤال $y=x^3$ است.

گام چهارم: رابطهٔ کمکی را در رابطهٔ اصلی جای‌گذاری می‌کنیم.

$$d(x)=\frac{|\overbrace{x-x^3}^{\ge 0}|}{\sqrt{2}} \xrightarrow[x^3\le x \Rightarrow 0\le x-x^3]{0\le x\le 1} d(x)=\frac{x-x^3}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۲) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $d'(x)=0$ را به دست می‌آوریم.

$$d'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}x^2 \xrightarrow{d'(x)=0} \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \xrightarrow{0\le x\le 1} x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (3)$$

گام ششم: از رابطهٔ (۳) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم تا بیشترین مقدار d به دست آید.

$$d_{max} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳} - (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۳}{\sqrt{۲}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳} - \frac{۱}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{۲}} = \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۹\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۹}$$

تست و پاسخ ۱۲۹

یک ضلع مستطیلی بر محور xها و دو سر ضلع دیگر آن بر نمودارهای دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{۳ - x}$ قرار دارد. اگر سطح این مستطیل در ناحیهٔ محدود به نمودارهای f، g و محور xها واقع باشد، بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

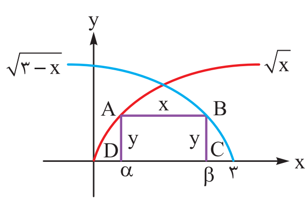
پاسخ: گزینهٔ ۳

نمودار دو تابع f و g را رسم کرده و متغیرهای سؤال را بر روی آن نشان دهید.

تبدیل‌های اصلی روی نمودارها، ۳ مدل‌اند: «**انتقال**»، «**قرینه‌یابی**» و «**انسباط و انقباض**»

		نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال $(b > ۰ \text{ و } a > ۰)$	افقی	a واحد به راست	$f(x - a)$	جای xها، $x - a$ می‌گذاریم.
		a واحد به چپ	$f(x + a)$	جای xها، $x + a$ می‌گذاریم.
	عمودی	b واحد به بالا	$f(x) + b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
		b واحد به پایین	$f(x) - b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.
قرینه‌یابی		قرینه نسبت به محور xها	$-f(x)$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.
		قرینه نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
		قرینه نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
انسباط و انقباض	افقی	انبساط با ضریب ۲	$f(\frac{x}{۲})$	جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم.
		انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$f(۲x)$	جای xها، ۲x می‌گذاریم.
	عمودی	انبساط با ضریب ۲	$۲f(x)$	کل ضابطه ضرب در ۲ می‌شود.
		انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}f(x)$	کل ضابطه ضرب در $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم. توجه کنید که برای رسم نمودار تابع $g(x) = \sqrt{۳ - x}$، کافی است ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را سه واحد به چپ منتقل کنید تا نمودار $y = \sqrt{۳ + x}$ به دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنید تا نمودار تابع $y = \sqrt{۳ - x}$ به دست آید.



در مستطیل ABCD، طول نقطهٔ D را α و طول نقطهٔ C را β در نظر می‌گیریم، پس $D(\alpha, ۰)$، $A(\alpha, \sqrt{\alpha})$، $C(\beta, ۰)$ و $B(\beta, \sqrt{۳ - \beta})$ است.

از آن‌جا که $ABCD$ مستطیل است، پس $AD = BC$، در نتیجه: طبق شکل باید $y_A = y_B$ باشد؛ پس:

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{3-\beta} \Rightarrow \alpha = 3-\beta \Rightarrow \beta = 3-\alpha$$

گام دوم: می‌خواهیم مساحت مستطیل بیشترین مقدار باشد؛ پس رابطهٔ اصلی، مربوط به مساحت مستطیل است. رابطهٔ اصلی: $S = xy \quad (1)$

گام سوم: مقادیر x و y را با توجه به گام اول برحسب α به دست می‌آوریم. ارتباط x و y با α روابط کمکی ما در این مرحله هستند.

روابط کمکی: $\begin{cases} x = \beta - \alpha = 3-\alpha-\alpha = 3-2\alpha & (2) \\ y = \sqrt{\alpha} & (3) \end{cases}$

گام چهارم: از روابط کمکی در تساوی (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا مساحت برحسب α به دست آید.

$$\xrightarrow{(1)\text{ و }(2)\text{ و }(3)} S(\alpha) = (3-2\alpha)(\sqrt{\alpha}) = 3\sqrt{\alpha} - 2\alpha\sqrt{\alpha} \quad (4)$$

گام پنجم: از رابطهٔ (۴) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $S'(\alpha) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$S(\alpha) = 3\alpha^{\frac{1}{2}} - 2\alpha^{\frac{3}{2}}$$

$$S'(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}} - 3\alpha^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{\alpha}} - 3\sqrt{\alpha} \xrightarrow{S'(\alpha)=0} \frac{3}{2\sqrt{\alpha}} - 3\sqrt{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha} \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

گام ششم: مقدار $\alpha = \frac{1}{2}$ را در (۴) قرار می‌دهیم تا S_{max} به دست آید.

$$S_{max} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} - 2\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

تست و پاسخ ۱۳۰

اگر $a+b+c=2$ و $ab+bc+ca=1$، آن‌گاه ماکزیمم $|a-b|$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

از تساوی‌های داده‌شده $a+b$ و ab را برحسب c به دست آورید، سپس $|a-b|$ را برحسب c بنویسید.

گام اول: می‌خواهیم ماکزیمم $A = |a-b|$ را به دست آوریم؛ پس رابطهٔ اصلی به صورت زیر است:

رابطهٔ اصلی: $A = |a-b| \quad (1)$

گام دوم: باید عبارت (۱) را برحسب یک متغیر بنویسیم تا بتوانیم از آن مشتق بگیریم. از تساوی‌های داده‌شده در صورت سؤال به عنوان رابطهٔ کمکی استفاده می‌کنیم.

$$a+b+c = 2 \Rightarrow a+b = 2-c \quad (2)$$

$$ab+bc+ca = 1 \Rightarrow ab + c(\underbrace{a+b}_{2-c}) = 1 \xrightarrow{(2)} ab + c(2-c) = 1 \Rightarrow ab = 1-2c+c^2 \quad (3)$$

از اتحادها می‌دانیم:

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \xrightarrow{(2)\text{ و }(3)} (a-b)^2 = (2-c)^2 - 4(1-2c+c^2) = 4-4c+c^2-4+8c-4c^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = -3c^2+4c \xrightarrow{\text{جذر}} |a-b| = \sqrt{-3c^2+4c} \xrightarrow{(1)} A(c) = \sqrt{-3c^2+4c} \quad (4)$$

گام سوم: از (۴) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $A'(c) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$A'(c) = \frac{-6c+4}{2\sqrt{-3c^2+4c}} = \frac{-3c+2}{\sqrt{-3c^2+4c}} \xrightarrow{A'(c)=0} -3c+2 = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

گام چهارم: مقدار $c = \frac{2}{3}$ را در (۴) قرار می‌دهیم تا A_{max} به دست آید.

$$A_{max} = \sqrt{-3(\frac{2}{3})^2 + 4(\frac{2}{3})} = \sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ریاضی پایه (مباحث مستقل): ریاضی (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۰

تست و پاسخ ۱۳۱

فاصلهٔ نقطهٔ (۴,۳) از مبدأ مختصات، چند برابر فاصلهٔ آن از نیمساز ربع اول است؟

۱) ۵   ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) ۲/۵   ۴) $۲/۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

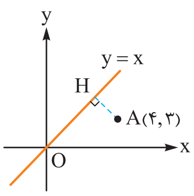
سؤال نسبتاً ساده‌ای است. اگر در پاسخ به آن اشکال دارید، به فرمول‌های کتاب درسی مراجعه کنید و آن‌ها را با دقت به‌خاطر بسپارید.

فاصلهٔ نقطهٔ (۴,۳) را از خط $y=x$ به دست آورید.

گام اول: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴,۳)$ از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم.

$$OA=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

گام دوم: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴,۳)$ از نیمساز ربع اول را به دست می‌آوریم.



$$y=x \Rightarrow y-x=۰$$

$$AH=\frac{|۳-۴|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال $\frac{OA}{AH}$ است.

$$\frac{OA}{AH}=\frac{۵}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=۵\sqrt{۲}$$

تست و پاسخ ۱۳۲

خط d از دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(۰,۱)$ می‌گذرد. عرض از مبدأ خط d' که در نقطهٔ A بر d عمود است، کدام است؟

۱) ۲−   ۲) ۱/۵−   ۳) ۳−   ۴) ۴−

پاسخ: گزینهٔ ۴

شیب خط d را به دست آورید. شیب خط d' قرینه و معکوس شیب خط d است.

اگر خط d بر خط d' عمود باشد، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها ۱− است، یعنی:

$$m_d m_{d'}=-۱ \text{ یا } m_d=-\frac{۱}{m_{d'}}$$

گام اول: ابتدا شیب خط d را به دست می‌آوریم.

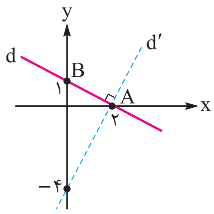
$$m_d=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۰-۱}{۲-۰}=-\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: خط d' بر خط d عمود است؛ پس شیب d' قرینه و معکوس شیب خط d است.

$$m_{d'}=-\frac{۱}{m_d}=-\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲$$

گام سوم: خط d' با شیب $m_{d'}=۲$ از نقطهٔ $A(۲,۰)$ عبور می‌کند. معادلهٔ این خط را می‌نویسیم.

$$d': y-۰=۲(x-۲) \Rightarrow y=۲x-۴ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=-۴$$



تست و پاسخ ۱۳۳

نقطهٔ A روی خط d موازی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد. اگر فاصلهٔ A از دو نقطهٔ $B(۲,۶)$ و $C(-۳,۱)$ به ترتیب $\sqrt{۱۰}$ و $۲\sqrt{۵}$ واحد باشد، عرض از مبدأ خط d کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

عرض از مبدأ خط d را h در نظر بگیرید و معادلهٔ این خط را به صورت $y=-x+h$ بنویسید. مختصات نقطهٔ A را $(\alpha,-\alpha+h)$ در نظر بگیرید.

فاصلهٔ دو نقطه از هم: فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B در دستگاه مختصات به کمک رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=\sqrt{(\text{اختلاف }x\text{ها})^۲+(\text{اختلاف }y\text{ها})^۲}$$

گام اول: شیب نیمساز ربع دوم و چهارم، -۱ است؛ پس معادلهٔ خط d که موازی آن است را می‌توان به صورت $y=-x+h$ نوشت.

گام دوم: اگر طول نقطهٔ A روی خط d را α در نظر بگیریم، عرض آن $-\alpha+h$ می‌شود؛ پس $A(\alpha,-\alpha+h)$ است.

گام سوم: فاصلهٔ نقطهٔ A تا دو نقطهٔ $B(۲,۶)$ و $C(-۳,۱)$ را نوشته و به ترتیب برابر با $\sqrt{۱۰}$ و $۲\sqrt{۵}$ قرار می‌دهیم.

$$AB=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(-\alpha+h-۶)^۲}=\sqrt{۱۰} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha-۲)^۲+(\alpha-h+۶)^۲=۱۰ \qquad (۱)$$

$$AC=\sqrt{(\alpha+۳)^۲+(-\alpha+h-۱)^۲}=۲\sqrt{۵} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha+۳)^۲+(\alpha-h+۱)^۲=۲۰ \qquad (۲)$$

گام چهارم: با تغییر متغیر $M=\alpha-۲$ و $N=\alpha-h+۶$، نتیجه می‌گیریم: $M+۵=\alpha+۳$ و $N-۵=\alpha-h+۱$ و معادله‌های (۱) و (۲) را بازنویسی می‌کنیم.

$$M^۲+N^۲=۱۰ \qquad (۳)$$

$$(M+۵)^۲+(N-۵)^۲=۲۰ \Rightarrow M^۲+۱۰M+۲۵+N^۲-۱۰N+۲۵=۲۰$$

$$\Rightarrow M^۲+N^۲+۱۰(M-N)=-۳۰ \xrightarrow{(۳)} ۱۰+۱۰(M-N)=-۳۰ \Rightarrow ۱۰(M-N)=-۴۰ \Rightarrow M-N=-۴$$

از طرفی $M-N=\alpha-۲-(\alpha-h+۶)=h-۸$ است؛ پس: $h-۸=-۴ \Rightarrow h=۴$

پس عرض از مبدأ خط d برابر با ۴ است.

تست و پاسخ ۱۳۴

دو نقطهٔ A و B را واقع بر محور xها در نظر بگیرید. اگر فاصلهٔ هر کدام از آن‌ها از خط $x+۱=۰$، دو برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(۲,-۱)$ باشد، جزء صحیح طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

مختصات نقطه روی محور xها را $(\alpha,۰)$ در نظر بگیرید. فاصلهٔ آن از خط $x+۱=۰$ را دو برابر فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(۲,-۱)$ قرار دهید.

در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta>۰$ داریم:

اختلاف ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	جمع ریشه‌ها
$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$P=\frac{c}{a}$	$S=\frac{-b}{a}$

گام اول: نقطهٔ $(\alpha,۰)$ را روی محور xها در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ این نقطه از خط $x+۱=۰$ برابر است با:

$$\frac{|\alpha+۱|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}}=|\alpha+۱| \qquad (*)$$

گام دوم: حالا فاصلهٔ نقطهٔ $(\alpha,۰)$ را از نقطهٔ $(۲,-۱)$ به دست می‌آوریم.

$$\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{\alpha^۲-۴\alpha+۵} \qquad (**)$$

گام سوم: طبق صورت سؤال، $(*)$ دو برابر $(**)$ است؛ پس:

$$|\alpha+۱|=۲\sqrt{\alpha^۲-۴\alpha+۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\alpha^۲+۲\alpha+۱=۴\alpha^۲-۱۶\alpha+۲۰$$

$$\Rightarrow ۳\alpha^۲-۱۸\alpha+۱۹=۰\xrightarrow[|\alpha_۱-\alpha_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}]{۰<\Delta}|\alpha_۱-\alpha_۲|=\frac{\sqrt{۱۸^۲-۴\times۳\times۱۹}}{۳}=\frac{\sqrt{۹۶}}{۳}$$

دو نقطهٔ A و B روی محور x هستند، یعنی مختصات آن‌ها به صورت $(\alpha_۱,۰)$ و $(\alpha_۲,۰)$ است و سؤال از ما طول پاره‌خط AB را می‌خواهد، یعنی $|\alpha_۱-\alpha_۲|$.

گام چهارم: خواستهٔ سؤال $[\frac{\sqrt{۹۶}}{۳}]$ است. از آن‌جایی که $\sqrt{۹۶}=۹+P$ است که در آن $۰<P<۱$ می‌باشد؛ پس:

$$[\frac{\sqrt{۹۶}}{۳}]=[\frac{۹+P}{۳}]=[۳+\underbrace{\frac{P}{۳}}_{۰<\frac{P}{۳}<۱}]=۳$$

تست و پاسخ ۱۳۵

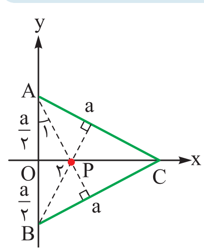
دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع روی محور yها و یک رأس آن روی محور xها قرار دارد. اگر طول نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های این مثلث برابر ۲ باشد، محیط آن کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۹\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

شکل سؤال را رسم کنید و اندازه‌ها را روی آن مشخص کنید.

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم.



گام دوم: در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه و نیمساز بر هم منطبق هستند، بنابراین زاویهٔ $A_۱$ برابر $۳۰^\circ = \frac{۶۰^\circ}{۲}$ است؛ هم‌چنین اگر ضلع مثلث را a در نظر بگیریم، $OA = \frac{a}{۲}$ است. در مثلث AOP داریم:

$$\tan A_۱ = \frac{۲}{OA} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{۲}{\frac{a}{۲}} \Rightarrow a = \frac{۴}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = ۴\sqrt{۳}$$

گام سوم: محیط مثلث برابر با $۳a = ۱۲\sqrt{۳}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۳۶

دو نقطهٔ $(-۱,۲)$ و $(۱,-۳)$ دو رأس مثلثی هستند که رأس سوم آن در ناحیهٔ سوم مختصات روی خط $y = x + ۱$ قرار دارد. اگر مساحت این مثلث برابر ۵ باشد، عرض رأس سوم چه عددی است؟

۱) $\frac{-۶}{۷}$ ۲) $\frac{-۱}{۷}$ ۳) $\frac{-۱۳}{۷}$ ۴) -۱

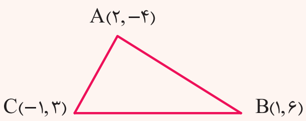
پاسخ: گزینهٔ ۱

اگر در مثلثی، مختصات ۳ رأس را داشتید و محاسبهٔ ارتفاع و قاعده‌اش سخت بود، مساحت را از روش درس‌نامه حساب کنید.

از فرمول مساحت مثلث با داشتن مختصات سه رأس استفاده کنید.

محاسبهٔ مساحت یک nضلعی با داشتن مختصات رئوسش

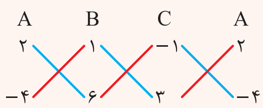
فرض کنید مختصات ۳ رأس مثلث ABC به صورت مقابل است:



از یک رأس (مثل A) شروع می‌کنیم و با چرخش دوباره به A می‌رسیم:

A B C A

مختصات‌ها را هم به همین شکل می‌نویسیم:



اعداد روی ابتدا و انتهای هر فلش آبی را در هم ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$(۲\times۶)+(۱\times۳)+(-۱\times(-۴)) = ۱۲+۳+۴ = ۱۹$:مجموع فلش‌های آبی

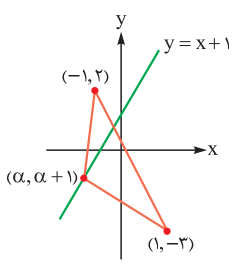
این کار را برای فلش‌های قرمز هم انجام می‌دهیم:

$(-۴\times۱)+(۶\times(-۱))+(۳\times۲) = -۴-۶+۶ = -۴$:مجموع فلش‌های قرمز

نصف قدرمطلق تفاضل دو مقدار بالا، برابر با مساحت مثلث ABC است:

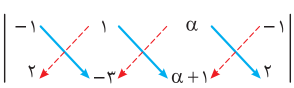
$$S = \frac{|\text{مجموع فلش‌های قرمز} - \text{مجموع فلش‌های آبی}|}{۲} = \frac{|۱۹-(-۴)|}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱/۵$$

گام اول: شکل فرضی مقابل را برای سؤال رسم می‌کنیم:



گام دوم: مختصات رأسی از مثلث که روی خط $y = x + ۱$ است را $(\alpha, \alpha+۱)$ در نظر می‌گیریم.

گام سوم: از فرمول مساحت مثلث با داشتن مختصات سه رأس استفاده می‌کنیم.



$$S = \frac{۱}{۲}\left|\underbrace{((-۱)(-۳)+۱(\alpha+۱)+۲\alpha)}_{۳\alpha+۴} - \underbrace{(۱\times۲-۳\alpha-(\alpha+۱))}_{-۴\alpha+۱}\right| \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}|۷\alpha+۳|$$

گام چهارم: مساحت مثلث را برابر با ۵ قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}|۷\alpha+۳|=۵ \Rightarrow |۷\alpha+۳|=۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۷\alpha+۳=۱۰ \Rightarrow ۷\alpha=۷ \Rightarrow \alpha=۱ \text{ غ ق ق} \\ ۷\alpha+۳=-۱۰ \Rightarrow ۷\alpha=-۱۳ \Rightarrow \alpha=-\frac{۱۳}{۷} \end{cases}$$

طبق صورت سؤال باید α منفی باشد تا رأس مورد نظر در ناحیهٔ سوم باشد.

گام پنجم: عرض رأس سوم برابر با $\alpha+۱=-\frac{۱۳}{۷}+۱=-\frac{۶}{۷}$ است.

تست و پاسخ ۱۳۷

دو رأس مربعی روی خطوط $L_۱: y=\frac{۳}{۴}x+۱$ و $L_۲: ۸y-۶x+۳=۰$ قرار دارند. نسبت مساحت مربع در حالتی که دو ضلع مربع بر خط $L_۱$ عمود باشند، به حالتی که یک قطر مربع بر این خط عمود باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $۱/۱\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

ابتدا وضعیت دو خط نسبت به هم را بررسی کنید. آیا دو خط موازی هستند؟!

وضعیت دو خط نسبت به هم

برای دو خط $L_۱: a_۱x+b_۱y+c_۱=۰$ و $L_۲: a_۲x+b_۲y+c_۲=۰$ داریم:

۱) اگر $\frac{a_۱}{a_۲}\neq\frac{b_۱}{b_۲}$ باشد، دو خط متقاطع هستند.

۲) اگر $\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}\neq\frac{c_۱}{c_۲}$ باشد، دو خط موازی و غیرمنطبق هستند.

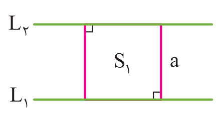
۳) اگر $\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}=\frac{c_۱}{c_۲}$ باشد، دو خط منطبق هستند.

گام اول: دو خط $L_۱$ و $L_۲$ با هم موازی هستند، زیرا:

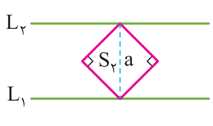
$$y=\frac{۳}{۴}x+۱ \xrightarrow{\times ۸} ۸y=۶x+۸ \Rightarrow L_۱: ۸y-۶x-۸=۰$$

همچنین $L_۲: ۸y-۶x+۳=۰$ است و شرط $\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}\neq\frac{c_۱}{c_۲}$ برقرار است؛ پس دو خط $L_۱$ و $L_۲$ موازی و غیر منطبق هستند.

گام دوم: شکل سؤال را رسم می‌کنیم.



حالت اول



حالت دوم

گام سوم: اگر فاصلهٔ دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را a در نظر بگیریم، ضلع مربع در حالت اول برابر a است و در حالت دوم قطر مربع برابر a می‌شود و می‌توانیم طول ضلع مربع را به دست آوریم.

$$(\text{قطر مربع})=\sqrt{۲}\times(\text{ضلع مربع}) \Rightarrow \text{ضلع مربع}=\frac{a}{\sqrt{۲}}$$

گام چهارم: نسبت مساحت‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{a^۲}{(\frac{a}{\sqrt{۲}})^۲}=۲$$

تست و پاسخ ۱۳۸

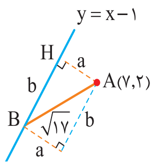
یک ضلع مستطیلی واقع بر خط $y = x - ۱$ و یک رأس آن نقطهٔ $(۷,۲)$ است. اگر طول قطر این مستطیل $\sqrt{۱۷}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

شکل فرضی از سؤال رسم کنید. فاصلهٔ نقطهٔ $(۷,۲)$ از خط $y = x - ۱$ طول یک ضلع از مستطیل است.

گام اول: اندازهٔ یک ضلع مستطیل برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $(۷,۲)$ از خط $y = x - ۱$ است.



$$y = x - ۱ \Rightarrow y - x + ۱ = ۰$$

$$a = \frac{|۲ - ۷ + ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

گام دوم: رابطهٔ فیثاغورس را در مثلث ABH می‌نویسیم تا طول ضلع دیگر مستطیل به دست آید.

$$b = \sqrt{(\sqrt{۱۷})^۲ - a^۲} = \sqrt{۱۷ - ۸} = \sqrt{۹} = ۳$$

گام سوم: مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = ab = ۲\sqrt{۲} \times ۳ = ۶\sqrt{۲}$$

تست و پاسخ ۱۳۹

مساحت متوازی‌الاضلاعی که یک رأس آن نقطهٔ $(۱,۲)$ و دو ضلع آن بر نمودار تابع $y = |۲x - ۱|$ واقع است، کدام است؟

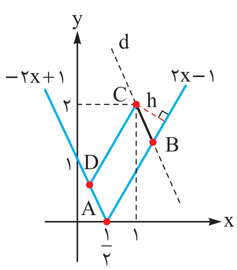
۱) ۱/۷۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲/۲۵

پاسخ: گزینهٔ

شکل سؤال را رسم کنید. ارتفاع و قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع را حساب کنید.

گام اول: متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم.

$$y = |۲x - ۱| = \begin{cases} ۲x - ۱ & , \frac{۱}{۲} \le x \\ -۲x + ۱ & , x < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$



گام دوم: ارتفاع متوازی‌الاضلاع را که برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $C(۱,۲)$ از خط $y = ۲x - ۱$ است، به دست می‌آوریم.

$$y = ۲x - ۱ \Rightarrow y - ۲x + ۱ = ۰$$

$$h = \frac{|۲ - ۲ + ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

گام سوم: خط d از نقطهٔ $C(۱,۲)$ عبور می‌کند و با خط $y = -۲x + ۱$ موازی است؛ پس شیب آن برابر با -۲ است. معادلهٔ خط d را می‌نویسیم.

$$y - ۲ = -۲(x - ۱) \Rightarrow y = -۲x + ۴$$

گام چهارم: از تقاطع خط d با خط $y=۲x-۱$، مختصات نقطهٔ B به دست می‌آید.

$$-۲x+۴=۲x-۱ \Rightarrow ۴x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۴}, y=۲\times\frac{۵}{۴}-۱=\frac{۳}{۲} \Rightarrow B(\frac{۵}{۴},\frac{۳}{۲})$$

گام پنجم: طول ضلع AB از متوازی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۴})^۲+(\circ-\frac{۳}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{\frac{۴۵}{۱۶}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۴}$$

گام ششم: مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$S=h\times AB=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{۳\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۳}{۴}=\circ/۷۵$$

تست و پاسخ ۱۴۰

در مثلث با رئوس $A(۱,۲)$، $B(\circ,۴)$ و $C(-۱,-۱)$ فاصلهٔ بین پای میانه و ارتفاع وارد بر ضلع BC چند برابر $\sqrt{۲۶}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۳}$ ۲) $\frac{۲}{۱۳}$ ۳) $\frac{۳}{۱۳}$ ۴) $\frac{۴}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

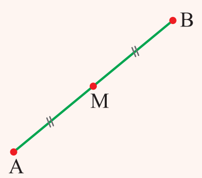
یکی از رایج‌ترین سؤالات هندسهٔ تحلیلی است که در امتحانات مدارس هم نمونهٔ آن بسیار تکرار شده است.

شکل سؤال را رسم کنید. مختصات نقطهٔ M وسط BC و معادلهٔ عمود AH را به دست آورده و سپس فاصلهٔ M را از ارتفاع AH حساب کنید.

نقطهٔ وسط یک پاره‌خط

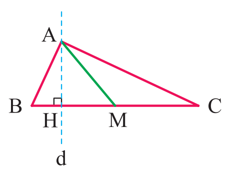
مختصات نقطهٔ وسط دو نقطهٔ A و B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{یا}} M=\frac{A+B}{۲}$$



گام اول: ابتدا یک شکل فرضی از سؤال رسم می‌کنیم.

طول پاره‌خط MH را باید حساب کنیم.



گام دوم: مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC را حساب می‌کنیم.

$$M(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲}) \Rightarrow M(\frac{\circ+(-۱)}{۲},\frac{۴+(-۱)}{۲}) \Rightarrow M(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$

گام سوم: عمود AH بر خط d منطبق است و این خط بر پاره‌خط BC عمود است؛ پس شیب خط d برابر است با:

$$m_d=-\frac{۱}{m_{BC}}=-\frac{۱}{\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}}=-\frac{۱}{\frac{۴-(-۱)}{\circ-(-۱)}}=-\frac{۱}{۵}$$

گام چهارم: خط d با شیب $-\frac{۱}{۵}$ از نقطهٔ $A(۱,۲)$ عبور می‌کند. معادلهٔ خط d را می‌نویسیم.

$$d: y-۲=-\frac{۱}{۵}(x-۱) \Rightarrow -۵y+۱\circ=x-۱ \Rightarrow ۵y+x-۱۱=\circ$$

گام پنجم: فاصلهٔ نقطهٔ M تا خط d برابر با MH است.

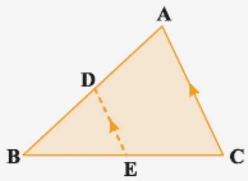
$$MH=\frac{|۵(\frac{۳}{۲})-\frac{۱}{۲}-۱۱|}{\sqrt{۵^۲+۱^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲۶}}=\frac{۴\sqrt{۲۶}}{۲۶}=\frac{۲}{۱۳}\times\sqrt{۲۶}$$

پس خواستهٔ سؤال $\frac{۲}{۱۳}$ است.

پاسخنامه ریاضی آزمون مرحله ۱۶ پایه دوازدهم

۱۸ بهمن‌ماه ۱۴۰۲

۷۱. در مثلث مقابل $DE \| AC$ و $۲BD = ۵AD$ و $DE + AC = ۲۴$ است. اندازهٔ AC کدام است؟



۱) ۱۱

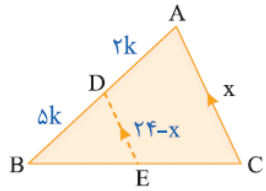
۲) ۱۲/۵

۳) ۱۴

۴) ۱۵/۵

پاسخ: گزینه ۳

سرنخ موازی بودن DE و AC نشون میده که لازمه از قضیه تالس استفاده کنید.

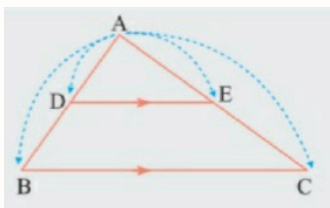
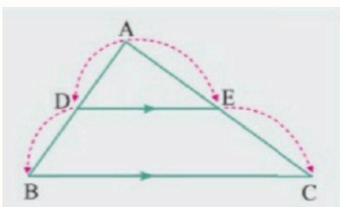


چون $DE + AC = ۲۴$ و $AC = x$ است، پس $DE = ۲۴ - x$ است. با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{۲۴ - x}{x} = \frac{۵k}{۷k} \Rightarrow \frac{۲۴ - x}{x} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow x = ۱۴$$

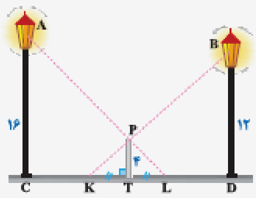
درسنامه

قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند. روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازهٔ آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهد.

تالس جزء به کل	تالس جزء به جزء
 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$	 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

نکته در مسائلی که صحبت از پاره‌خط DE است، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

۷۲. مطابق شکل یک میلهٔ فلزی به طول $PT = ۴m$ بین دو تیر چراغ برق به طول‌های $AC = ۱۶m$ و $BD = ۱۲m$ قرار گرفته است. اگر فاصلهٔ دو تیر چراغ برق و سایهٔ میله در دو طرف آن به یک اندازه باشد، فاصلهٔ CT چقدر است؟



۱) ۲۲

۲) ۲۴

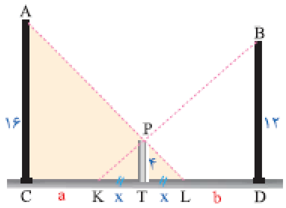
۳) ۲۶

۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

سرنخ قضیه تالس را در دو مثلث بزرگ به کار برده و LD و CK را به دست آورید.

یک بار در مثلث ACL و یک بار هم در مثلث BDK از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.



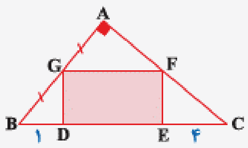
$$\text{ACL مثلث}: \frac{۴}{۱۶}=\frac{x}{۲x+a}\Rightarrow ۲x+a=۴x\Rightarrow a=۲x$$

$$\text{BDK مثلث}: \frac{۴}{۱۲}=\frac{x}{۲x+b}\Rightarrow ۲x+b=۳x\Rightarrow b=x$$

از طرفی طبق صورت سؤال $CD=۴۰m$ است، پس:

$$a+۲x+b=۴۰\Rightarrow ۲x+۲x+x=۴۰\Rightarrow x=۸\Rightarrow CT=a+x=۳x=۲۴$$

۷۳. در شکل مقابل چهارضلعی GFDE یک مستطیل است. اگر $AG=GB$ ، $BD=۱$ و $EC=۴$ واحد باشد، محیط مستطیل GFED کدام است؟



۱) ۱۴

۲) ۱۶

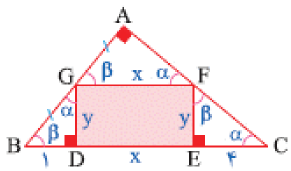
۳) ۱۸

۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۱

سرنخ تالس جزء به کل را در مثلث ABC به کار برده و طول ضلع مستطیل را بیابید. عرض مستطیل از تشابه مثلث‌های کناری به‌دست می‌آید.

ابتدا با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AG}{AB}=\frac{GF}{BC}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۵}\Rightarrow x=۵$$

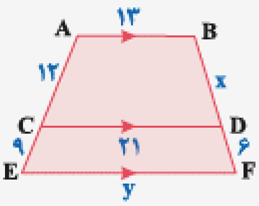
حال مطابق شکل مثلث‌های EFC و BGD متشابه‌اند، پس:

$$\frac{GD}{EC}=\frac{BD}{FE}\Rightarrow \frac{y}{۴}=\frac{۱}{y}\Rightarrow y=۲$$

پس محیط مستطیل GFED برابر است با:

$$۲(x+y)=۲(۲+۵)=۱۴$$

۷۴. در شکل مقابل $AB\|CD\|EF$ است. مقدار $x+y$ کدام است؟



۱) ۲۸

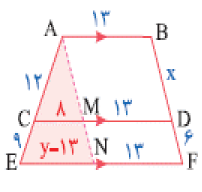
۲) ۳۰

۳) ۳۳

۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که چهار پاره‌خط ایجاد شده روی ساق‌های ذوزنقه توسط CD، طبق تالس متناسب‌اند، یعنی:



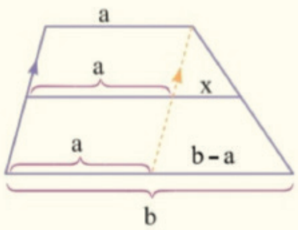
$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}\Rightarrow \frac{۱۲}{۹}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=۸$$

حال از رأس A خطی به موازات ساق BF رسم می‌کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث AEN داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲+۹}=\frac{۸}{y-۱۳}\Rightarrow y-۱۳=۱۴\Rightarrow y=۲۷\Rightarrow x+y=۳۵$$

درسنامه

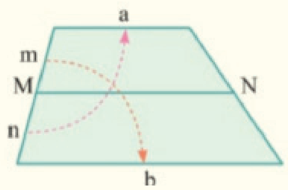
اگر پاره خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم شود، برای به دست آوردن طول این پاره‌خط می‌توانیم از یک رأس ذوزنقه خطی موازی یکی از ساق‌ها رسم کنیم و قضیهٔ تالس را در مثلث ایجاد شده بنویسیم.



اگر در یک ذوزنقه پاره‌خطی موازی دو قاعده رسم شود، نکات زیر قابل نتیجه‌گیری است:

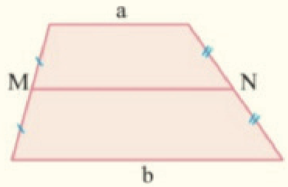
۱- در حالت کلی:

$$MN = \frac{na + mb}{n + m}$$



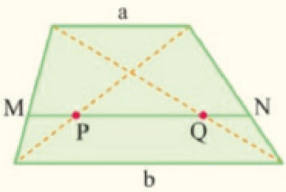
۲- اگر MN وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند:

$$MN = \frac{a + b}{۲}$$

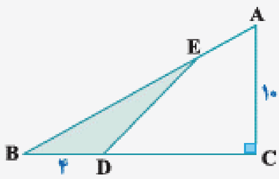


۳- اگر دو قطر ذوزنقه را رسم کنیم:

$$PQ = \frac{b - a}{۲}$$



۷۵. در مثلث مقابل $BE = ۴AE$ و $BD = ۴$ و $AC = ۱۰$ است. مساحت مثلث BDE چقدر است؟



۱) ۱۴

۲) ۱۶

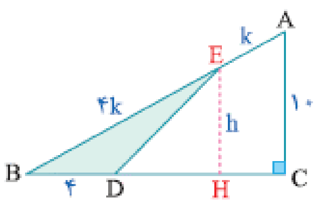
۳) ۱۸

۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

سرنخ از نقطهٔ E خطی موازی ضلع AC رسم کرده و از قضیه تالس استفاده کنید.

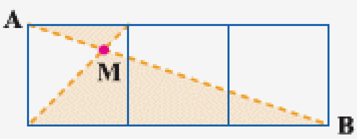
از نقطهٔ E خطی بر ضلع BC عمود می‌کنیم. حال از آن جایی که EH و AC موازی‌اند. با اســـتفاده از تالس جزء به کل داریم:



$$\frac{BE}{BA} = \frac{EH}{AC} \Rightarrow \frac{۴k}{۵k} = \frac{h}{۱۰} \Rightarrow h = ۸$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}BD \times h = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸ = ۱۶$$

۷۶. در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. فاصلهٔ MA چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

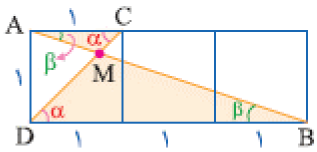
۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲

سرنخ نسبت تشابه را برای دو مثلث بالایی و پایینی بنویسید.



ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس وتر مثلث AD، برابر $\sqrt{۱۰}$ به دست می‌آید.

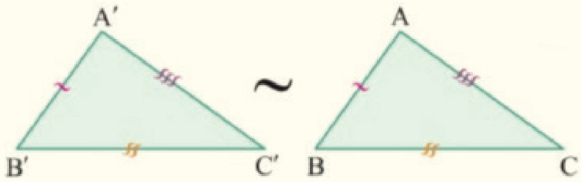
اگر فرض کنیم $MA = x$ باشد پس طول $MB = \sqrt{۱۰} - x$ خواهد بود. مطابق شکل مثلث‌های AMC و DMB متشابه‌اند، در نتیجه:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{MA}{MB} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{\sqrt{۱۰} - x} \Rightarrow ۴x = \sqrt{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

درسنامه

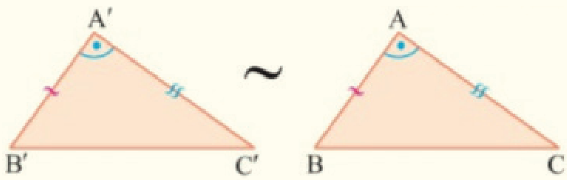
قضیه‌های تشابه: دو مثلث در حالت های زیر متشابه اند: $A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$

۱- تناسب سه ضلع



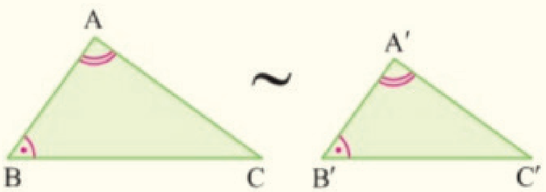
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲- تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین



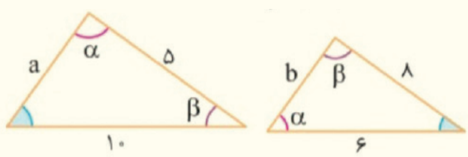
$\hat{A} = \hat{A}'$ و $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

۳- تساوی دو زاویه



$\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{A} = \hat{A}'$

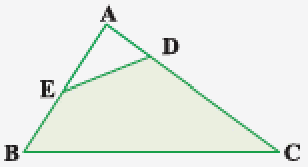
نحوهٔ نوشتن نسبت تشابه: وقتی می‌دانیم دو مثلث متشابه‌اند، برای نوشتن نسبت تشابه، ۳ خط کسری را برابر هم قرار می‌دهیم. سپس اضلاع یکی از مثلث‌ها، را (مثلاً مثلث (۱) در صورت کسرها می‌نویسیم. حال اضلاع مثلث دیگر را طوری در مخرج کسرها می‌نویسیم که اضلاع روبه‌روی زاویهٔ α در دو مثلث، زیر هم باشند، اضلاع روبه‌روی زاویهٔ β نیز زیر هم و.... .



مثلث (۱) مثلث (۲)

$$\frac{۱۰}{۸} = \frac{a}{۶} = \frac{۵}{b}$$

۷۷. در چهارضلعی BCDE ، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هم‌اند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ ، آن گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۰/۵۶

۲) ۰/۶۴

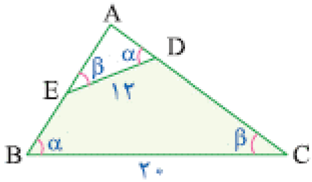
۳) ۰/۷۲

۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۲

سرنخ نسبت تشابه دو مثلث مشابه AED و ABC را به دست آورده و نسبت مساحت‌ها را حساب کنید.

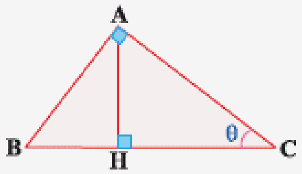
چون زوایای روبه‌رو در چهارضلعی مکمل یکدیگرند. پس زوایای نشــان داده شــده در شــکل با هم برابرند و در نتیجه مثلث‌های ABC و AED با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:



$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{۱۲}{۲۰}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵} \xrightarrow{\text{فرض می کنیم}} \begin{cases} S_{AED} = ۹S \\ S_{EDCB} = ۱۶S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{EDCB}}{S_{ABC}} = \frac{۱۶S}{۲۵S} = ۰/۶۴$$

۷۸. در مثلث مقابل $A\hat{C}B = \theta$ و $BC = ۲$ است. اندازهٔ ارتفاع AH کدام است؟



۱) $\sin^۲\theta$

۲) $\sin ۲\theta$

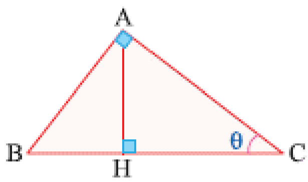
۳) $\cos^۲\theta$

۴) $\cos ۲\theta$

پاسخ: گزینه ۲

سرنخ با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی در قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم و ارتفاع AH را به دست آورید.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$\sin\theta = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = ۲\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = ۲\cos\theta$$

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} \Rightarrow AH = \frac{(۲\sin\theta)(۲\cos\theta)}{۲}$$

$$= ۲\sin\theta\cos\theta \Rightarrow AH = \sin ۲\theta$$

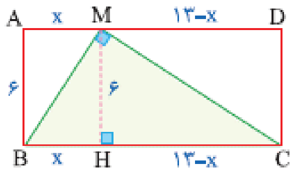
۷۹. در مستطیل به اضلاع ۱۳ و ۶ نقطهٔ M بر روی ضلع بزرگ‌تر قرار دارد و خطوط واصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عمودند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۳

سرنخ بعد از رسم شکل، با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، خواسته مسئله به راحتی قابل محاسبه است.

با توجه به مسئله شکل مقابل حاصل می‌شود و در مثلث قائم‌الزاویه BMC داریم:

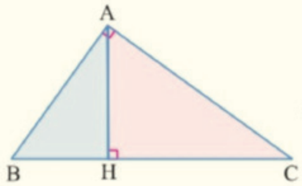


$$MH^2 = BH \times CH \Rightarrow ۶^2 = (x) \times (۱۳ - x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 - ۱۳x + ۳۶}_{(x-۴)(x-۹)} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \checkmark \\ x = ۹ \times \end{cases}$$

درسنامه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، با رسم ارتفاع وارد بر وتر، سه مثلث متشابه به وجود می‌آید:



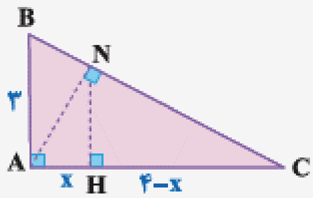
$$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH}$$

۱- از تشابه مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ACH}$ نتیجه می‌گیریم: $AH^2 = BH \times CH$

۲- از تشابه مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با هر یک از مثلث‌های کوچک‌تر، نتیجه می‌گیریم:

$AC^2 = CH \times BC$ $\qquad$ $AB^2 = BH \times BC$

۸۰. مطابق شکل هر دو ارتفاع مثلث‌های قائم‌الزاویه رسم شده است. مقدار x کدام است؟



۱) ۱/۴۴

۲) ۱/۵۶

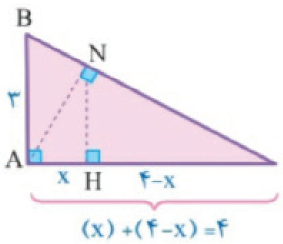
۳) ۱/۶۴

۴) ۱/۹۶

پاسخ: گزینه ۱

سرنخ با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر و ارتفاع وارد بر وتر به راحتی قابل محاسبه بوده و سپس x را بیابید.

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس وتر BC برابر ۵ به دست می‌آید. حال ارتفاع AN را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به دست می‌آوریم:



$$AN = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{۳ \times ۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

حال در مثلث قائم الزاویه ANC داریم:

$$AN^2 = AH \times AC \Rightarrow \left(\frac{۱۲}{۵}\right)^2 = (x) \times (۴) \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۲۵} = ۱/۴۴$$

۸۱. اگر $f(۲) = ۲f'(۲) = ۲$ ،$g(۲) = g'(۲) = ۳$ باشد، مشتق تابع $\frac{(f+g)(x)}{x+f(x)}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ $\qquad$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ $\qquad$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ $\qquad$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

تک پله : با توجه به صورت سـؤال $f(۲)=۲\,,\,f'(۲)=۱\,,\,g(۲)=g'(۲)=۳$ اسـت. حال از تابع $y=\dfrac{f(x)+g(x)}{x+f(x)}$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=۲$ می‌گذاریم:

$$y'=\frac{\big(f'(x)+g'(x)\big)\big(x+f(x)\big)-\big(۱+f'(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)}{\big(x+f(x)\big)^۲}\xrightarrow{x=۲}$$

$$y'=\frac{\big(f'(۲)+g'(۲)\big)\big(۲+f(۲)\big)-\big(۱+f'(۲)\big)\big(f(۲)+g(۲)\big)}{\big(۲+f(۲)\big)^۲}=\frac{(۱+۳)(۲+۲)-(۱+۱)(۲+۳)}{(۲+۲)^۲}=\frac{۱۶-۱۰}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

درسنامه

۱- مشتق توابع کسری

تابع	مشتق
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)\times g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$

۲- مقایسه!

دو مورد را همیشه به خاطر داشته باشید.

تابع	مشتق
$y=f(x)+g(x)$	$y'=f'(x)+g'(x)$
$y=f(x)\times g(x)$	$y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

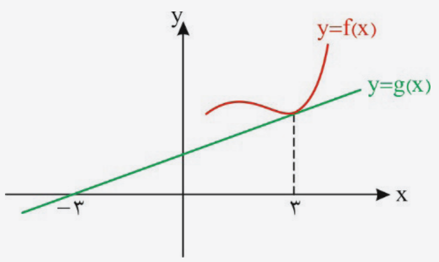
۸۲. مطابق شکل، نمودار تابع خطی g بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=۳$ مماس است و $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{xf(x)+g(x)-۴}{x-۳}=a$ است. مقدار حقیقی a کدام است؟

۱) ۲

۲) $\dfrac{۵}{۳}$

۳) $\dfrac{۷}{۲}$

۴) $\dfrac{۷}{۳}$



پاسخ: گزینه ۲

پلهٔ اول: با جایگذاری $x=۳$ در حد داده شده مخرج برابر صفر می‌شود و چون حد وجود دارد و مقدار آن حقیقی است بنابراین صورت کسر به ازای $x=۳$ برابر صفر می‌شود.

$$۳f(۳)+g(۳)-۴=۰$$

$g(x)$ و $f(x)$ در $x=۳$ بر هم مماس‌اند بنابراین $g(۳)=f(۳)$:

$$۴f(۳)=۴\Rightarrow f(۳)=g(۳)=۱$$

پلهٔ دوم: حال معادله تابع خطی $g(x)$ را می‌نویسیم:

$$y-۰=\frac{۱-۰}{۳-(-۳)}(x+۳)\to g(x)=\frac{۱}{۶}x+\frac{۱}{۲}$$

پله سوم: حاصل حد خواسته شده را با استفاده از هوپیتال به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{xf(x)+g(x)-۴}{x-۳}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)+xf'(x)+g'(x)}{۱}$$

$$=f(۳)+۳f'(۳)+g'(۳)\to\xrightarrow[\text{مماس‌اند}]{x=۳\ \text{در}\ f\ \text{و}\ g}۱+۳\times\left(\frac{۱}{۶}\right)+\frac{۱}{۶}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}$$

درسنامه

توجه:

۱- درحل سؤالات حد، اگر به حالتِ (عدد $= \lim\limits_{x\to a} \frac{\text{☁}}{\text{صفرحدی}}$) رسیدید، بدانید که حتماً حاصل ☁ هم برابر صفر حدی بوده که پس از رفع ابهام $\frac{\cdot}{\cdot}$ به حاصل «عدد» رسیده‌ایم.

۲- مختصات نقاط تماس دو تابع در هر دو تابع صدق می‌کند و مشتق هر دو تابع در آن نقطه یکسان است.

۸۳. در تابع چند جمله‌ای $f(x)$ اگر $f(x)+2f'(2x)=x^3+12x^2+4x+9$ باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۳۰۴-　　۲) ۳۰۴　　۳) ۱۲۰-　　۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پلهٔ اول: با توجه به اینکه مشتق تابع چند جمله‌ای درجهٔ n از درجهٔ $n-1$ است پس $f(x)$ درجه ۳ می‌باشد.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f(2x)=8ax^3+4bx^2+2cx+d$$

می‌دانیم مشتق $f(u)$ برابر است با $u'f'(u)$ پس مشتق $f(2x)$ می‌شود:

$$2f'(2x)=24ax^2+8bx+2c$$

پلهٔ دوم: حال می‌توان تابع $y=f(x)+2f'(2x)$ را نوشت:

$$\Rightarrow y=ax^3+bx^2+cx+d+24ax^2+8bx+2c$$

$$\Rightarrow y=ax^3+(b+24a)x^2+(c+8b)x+d+2c$$

با توجه به‌صورت سوال داریم:

$$ax^3+(b+24a)x^2+(c+8b)x+d+2c=x^3+12x^2+4x+9$$

پلهٔ سوم: با مساوی قرار دادن ضرایب، مقادیر c, b, a و d به دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b+24a=12 \Rightarrow b=-12 \\ c+8b=4 \Rightarrow c=100 \\ d+2c=9 \to d=-191 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=x^3-12x^2+100x-191 \to f(-1)=-304$$

درسنامه

۱- مشتق توابع چند جمله ای: مشتق تابع $y=ax^n$ رو یادتونه!؟ احسنت. $y'=nax^{n-1}$. میخواهم به یه نکته توجه کنید که درجه تابع مشتق y از درجهٔ خود تابع y، یک واحد کمتر است. به‌عنوان مثال اگر مشتق تابعی از درجهٔ دوم باشد، نتیجه می‌گیریم که تابع اصلی از درجهٔ سوم بوده است.

۲- $f(x)$ یا $f(u)$ مسئله این است: اگر $f(x)$ تابعی بر حسب x باشد آنگاه مشتق توابع زیر را بلدیم!

الف) $y=f(x)\to y'=f'(x)$　　ب) $y=f^2(x)\to y=2f(x)f'(x)$

اگر در همین عبارت‌های بالا به جای x، تابعی بر حسب x مثل u قرار بگیرد، باید y' را در u' ضرب کنیم. ببینید:

الف) $y=f(u)\to y'=f'(u).u'$　　ب) $y=f^2(u)\to y'=2f(u)f'(u).u'$

امیدوارم قاطی نکرده باشین! به‌عنوان یک توصیه: همیشه در حل سؤالاتی که به جای x تابعی بر حسب x مثل u قرار گرفته، u را به‌صورت فرض کرده و سؤال را مثل $f(x)$ حل کنید و در گام آخر ، مشتق گرفته و در حاصل نهایی مشتق ضرب کنید.

۸۴. خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ در نقطهٔ A به طول ۱ واقع بر آن، منحنی را در نقطهٔ دیگر B قطع می‌کند. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B کدام است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

پلهٔ اول: عرض نقطهٔ مماس را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\xrightarrow{x_A=1}y_A=0\to A(1,0)$$

پلهٔ دوم: شیب خط مماس در نقطه A را به‌دست آورده و معادله خط مماس را می‌نویسیم.

$$y'=\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\xrightarrow{x_A=1}y'_A=-1+2=1$$

معادله خط مماس در نقطه مماس $\xrightarrow{A} y=x-1$

پلهٔ سوم: خط مماس را با منحنی تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقطه تلاقی دیگر (B) به‌دست آید.

$$\begin{cases}y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\\ y=x-1\end{cases}\to x-1=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\xrightarrow{\times x^2}x^3-x^2=x-1$$

$$\to x^3-x^2-x+1=0\to (x-1)^2(x+1)=0$$

$$\to x=\pm1\to B(-1,-2)$$

پلهٔ چهارم: فاصله دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

درسنامه

نوشتن معادله خط مماس: برای نوشتن معادلهٔ خط مماس در نقطه‌ای واقع بر منحنی تابع $(x=x_0)$ سه مرحلهٔ زیر را طی می‌کنیم:

۱- قبل از هر کاری مختصات نقطهٔ مماس را کامل می‌کنیم $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$

۲- ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین می کنیم و مقدار مشتق در نقطهٔ مماس را برابر شیب خط مماس در نظر می‌گیریم $m_{\text{مماس}}=f'(x_0)$

۳- حالا با داشتن نقطهٔ A و شیب خط می‌توانیم معادلهٔ خط را با استفاده از رابطهٔ زیر بنویسیم.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

پیدا کردن نقاط تلاقی: برای پیدا کردن نقاط تلاقی دو تابع $y_1=f(x), y_2=g(x)$ کافی است معادلهٔ تلاقی را تشکیل دهیم:

$$y_1=y_2\Rightarrow f(x)=g(x)$$

پیدا کردن فاصله دو نقطه: برای پیدا کردن فاصلهٔ دو نقطه $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ داریم:

$$AB=\sqrt{(\text{اختلاف}x\text{ها})^2+(\text{اختلاف}y\text{ها})^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

۸۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+5 & ;x<2\\ bx+a+1 & ;x\geq 2\end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶- ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه ۳

هر یک از ضابطه‌ها در بازهٔ خود پیوسته و مشتق‌پذیر هستند، بنابراین در نقطهٔ مرزی $x=2$ باید:

۱- تابع پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x^2+ax+5)=13+2a$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(bx+a+1)=2b+a+1$$

$$\Rightarrow 13+2a=2b+a+1\Rightarrow a-2b=-12$$

۲- مشتق چپ و راست تابع برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}4x+a & ;x<2\\ b & ;x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_-(2)=8+a\\ f'_+(2)=b\end{cases}\Rightarrow 8+a=b$$

از دو معادلهٔ بالا $b=4$ و $a=-4$ به‌دست می‌آید، پس $ab=-16$ است.

۸۶. اگر $f(x)=\left|x^2-3x-10\right|-2x^2$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=9$ کدام است؟

۱) ۷- ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱

پله اول: ابتدا درون قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2-3x-10=0\Rightarrow(x-5)(x+2)=0\Rightarrow x=5 \text{ یا } x=-2$$

$$\text{اگر } x\geq 5\Rightarrow f(x)=x^2-3x-10-2x^2\Rightarrow f(x)=-x^2-3x-10$$

$$\Rightarrow f'(x)=-2x-3\Rightarrow -2x-3=+9\Rightarrow -2x=12\Rightarrow x=-6$$

عدد به‌دست آمده بزرگ‌تر از ۵ نیست پس قابل قبول نمی‌باشد.

پله دوم:

$$\text{اگر } -2\leq x<5\Rightarrow f(x)=-x^2+3x+10-2x^2$$

$$\Rightarrow f(x)=-3x^2+3x+10\Rightarrow f'(x)=-6x+3$$

$$\Rightarrow -6x+3=9\Rightarrow -6x=6\Rightarrow \boxed{x=-1}$$

پله سوم:

$$\text{اگر } x<-2\Rightarrow f(x)=x^2-3x-10-2x^2=-x^2-3x-10$$

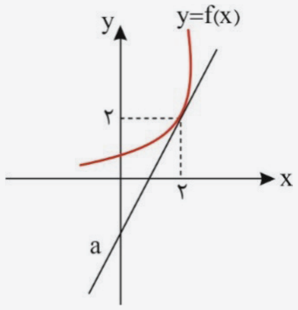
$$\Rightarrow f'(x)=-2x-3=9\Rightarrow \boxed{x=-6}$$

پس مجموع جواب‌ها می‌شود. $(-1)+(-6)=-7$

درسنامه

مشتق گیری از توابع قدرمطلقی: برای مشتق گیری از توابعی که شامل قدر مطلق هستند، ابتدا با توجه به جدول تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، قدرمطلق را در فواصل مختلف برداشته و تابع را به‌صورت تابعی چند ضابطه‌ای تبدیل کنید.
و در گام بعدی از تک تک ضابطه‌ها در بازهٔ تعریفشان، مشتق بگیرید.
توجه داشته باشید که جواب‌های به دست آمده باید با بازهٔ تعریف آن، تطابق داشته باشد.

۸۷. **نمودار تابع $y=f(x)$ و خط مماس بر آن در نقطهٔ $x=۲$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=f\big(f(x)\big)$ باشد و خط مماس بر نمودار تابع g محور yها را در نقطهٔ $(۰,-۶)$ قطع کند. مقدار a کدام است؟**



۱) $۱-۲\sqrt{۲}$
۲) -۲
۳) $-۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}-۲$

پاسخ: گزینه ۲

پله اول: ابتدا شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. از این خط دو نقطه به مختصات $(۲,۲)$ و $(۰,a)$ داریم پس:

$$m=\frac{۲-a}{۲-۰}\Rightarrow m=\frac{۲-a}{۲}$$

پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۲$ برابر $\frac{۲-a}{۲}$ می‌شود یعنی: $f'(۲)=\frac{۲-a}{۲}$

نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲,۲)$ عبور می‌کند پس: $f(۲)=۲$

پلهٔ دوم: حال با توجه به داده‌های سؤال شیب خط مماس بر نمودار $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=f\big(f(x)\big),x=۲\Rightarrow g(۲)=f\big(f(۲)\big)=f(۲)=۲$$

$g(x)$ از نقطه‌های $(۲,۲)$ و $(۰,-۶)$ عبور می‌کند پس شیب آن برابر ۴ می‌شود.

پلهٔ سوم: می‌توان شیب خط مماس بر $g(x)$ را با استفاده از مشتق، به دست آورد که در آن از فرمول مشتق توابع مرکب استفاده می‌کنیم:

$$g(x)=f\big(f(x)\big)\Rightarrow g'(x)=f'(x)\times f'\big(f(x)\big)$$

$$x=۲\Rightarrow g'(۲)=f'(۲)\times f'\big(f(۲)\big)=f'(۲)\times f'(۲)$$

$$\Rightarrow g'(۲)=\frac{۲-a}{۲}\times\frac{۲-a}{۲}$$

پلهٔ چهارم: با توجه به پله سوم، شیب خط مماس بر $g(x)$ برابر ۴ است، پس داریم:

$$\frac{a-۲}{۲}\times\frac{a-۲}{۲}=۴\Rightarrow (a-۲)^۲=۱۶\rightarrow a-۲=\pm۴\rightarrow a=۲\pm۴\xrightarrow{a<۰}a=-۲$$

درسنامه

۱- پیدا کردن شیب: با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر شیب خط را تعیین کرد.

$$A\left|\begin{matrix}x_۱\\y_۱\end{matrix}\right.\qquad B\left|\begin{matrix}x_۲\\y_۲\end{matrix}\right.\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

۲- یادآوری : در درسنامهٔ قبلی هم گفتیم شیب خط مماس در نقطهٔ $x_۰$ همان مشتق تابع در نقطهٔ $x_۰$ است.

۳- مشتق تابع مرکب: برای تعیین مشتق تابع مرکب از دو قاعدهٔ زیر بهره می‌بریم:

تابع	مشتق
$y=f(g(x))$	$y'=g'(x)\times f'(g(x))$
$y=f(u)$	$y'=u'\times f'(u)$

۸۸. معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5x^2-5x}{x-1}$ در نقطه‌ای که مشتق اول از دو برابر مشتق دوم یک واحد کمتر است، به صورت $ay=bx+c$ است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۶۲-　　۲) ۴۰　　۳) ۱۲۴-　　۴) ۱۲۴

پاسخ: گزینه ۱

پلهٔ اول: دامنه تابع $f(x)$ برابر $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ است. $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5x(x-1)}{x-1}=x^3-\frac{3}{2}x^2+5x\,,\,x\neq 1$$

$$f'(x)=3x^2-3x+5\Rightarrow f''(x)=6x-3$$

پلهٔ دوم:

$$f'(x)=2f''(x)-1\rightarrow 3x^2-3x+5=2(6x-3)-1$$

$$\rightarrow 3x^2-15x+12=0\rightarrow\begin{cases}x=1\notin D_f\\ x=4 \text{ نقطهٔ مماس } (4,60)\end{cases}$$

پلهٔ سوم: شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ را در نقطه مماس $(x=4)$ به دست آورده و معادله خط مماس را می‌نویسیم.

$$f'(4)=3(4)^2-3(4)+5=41$$

$$\xrightarrow{(4,60)} \text{معادله خط مماس}: y=41x-104$$

پلهٔ چهارم: با مقایسهٔ $ay=bx+c$ با معادلهٔ خط مماس، $a=1$، $b=41$ و $c=-104$ است، پس: $a+b+c=1+41-104=-62$

درسنامه

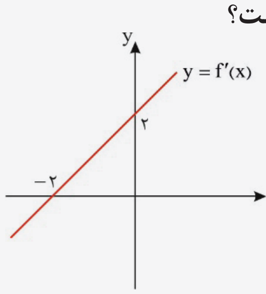
نوشتن معادلهٔ خط مماس: برای نوشتن معادلهٔ خط مماس در نقطه‌ای واقع بر منحنی تابع $x=x_0$ سه مرحلهٔ زیر را طی می‌کنیم:

۱- قبل از هر کاری مختصات نقطهٔ مماس را کامل می‌کنیم $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$

۲- ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین می‌کنیم و مقدار مشتق در نقطهٔ تماس را برابر شیب خط مماس در نظر می‌گیریم $m_{\text{مماس}}=f'(x_0)$

۳- حالا با داشتن نقطهٔ A و شیب خط می‌توانیم معادلهٔ خط را با استفاده از رابطهٔ مقابل بنویسیم: $y-y_0=m(x-x_0)$

۸۹. نمودار تابع $y=f'(x)$ به صورت مقابل است. اگر $f(2)=8$ باشد، کمترین مقدار تابع f کدام است؟



۱) ۲-
۲) ۰
۳) ۲
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

پله اول: نمودار تابع $y=f'(x)$ به صورت تابعی خطی است، پس $f(x)$ تابعی درجه دوم می‌باشد.

دو نقطه از تابع خطی $y=f'(x)$ را داریم که می‌توان معادلهٔ آن را نوشت:

$$(-۲,۰),(۰,۲) \Rightarrow m=\frac{۲-۰}{۰+۲} \Rightarrow m=۱$$

$$y-۰=۱(x+۲) \Rightarrow y=x+۲ \Rightarrow f'(x)=x+۲$$

پله دوم: تابع درجه دوم به فرم $f(x)=ax^۲+bx+c$ است. که مشتق آن به صورت $f'(x)=۲ax+b$ می‌شود، پس داریم:

$$\begin{cases} f'(x)=x+۲ \\ f'(x)=۲ax+b \end{cases} \Rightarrow ۲a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}, b=۲ \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+c$$

از طرفی $f(۲)=۸$:

$$f(۲)=۸ \Rightarrow x=۲, y=۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^۲+۲x+c=۸$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲)^۲+۲(۲)+c=۸ \Rightarrow ۲+۴+c=۸ \Rightarrow c=۲$$

پله سوم: در نتیجه ضابطهٔ تابع $f(x)$ به شکل زیر است که با دو رابطهٔ $y_s=f\left(\frac{-b}{۲a}\right)$ یا $y_s=\frac{-\Delta}{۴a}$ می‌توان کمترین یا بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم را حساب کرد. در اینجا $a>۰$ هست پس داریم: $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۲$

$$x_s=-۲ \Rightarrow y_s=f(-۲)=۰$$

درسنامه

۱- نوشتن معادلهٔ خط: اگر مختصات دو نقطه $A\begin{vmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{vmatrix}, B\begin{vmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{vmatrix}$ از یک خط معلوم باشد. برای نوشتن معادله خط دو گام زیر را طی می‌کنیم:

۱- ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم: $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

۲- در گام دوم با استفاده از رابطهٔ زیر معادله خط را کامل می‌کنیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

۲- توان شکنی مشتق: با یک مثال توضیح می دهیم. تابع $f(x)=x^۲+x$ را در نظر بگیرید، حالا بیایید از تابع f، مشتق بگیریم،

$$f'(x)=۲x+۱$$

ببینید که درجهٔ $f'(x)$، یک و درجه $f(x)$، دو است. به‌عبارتی ساده‌تر درجه $f'(x)$ یک واحد کمتر از درجه $f(x)$ است. و می‌توان به این موضوع به صورت بلعکس نگاه کرد. بدین صورت که اگر به فرض مثال درجه $f'(x)$، یک باشد نتیجه می‌گیریم که درجه $f(x)$، دو است.

۹۰. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ در بازهٔ $[a,۳]$ برابر $\frac{۲}{۷}$ است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=a$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینه ۲

پلهٔ اول: آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[a,3]$ برابر است با:

$$\frac{f(3)-f(a)}{3-a}=\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{\sqrt{4}-\sqrt{a+1}}{3-a}=\frac{2}{7}\Rightarrow 14-7\sqrt{a+1}=6-2a\Rightarrow 7\sqrt{a+1}=8+2a\xrightarrow{\text{توان }2}$$

$$49(a+1)=\underbrace{(8+2a)^2}_{64+32a+4a^2}\Rightarrow 4a^2-17a+15=0\to(4a-5)(a-3)=0\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{4}\\a=3\end{cases}$$

با توجه به بازهٔ $[a,3]$ باید $a<3$ باشد، پس $a=\frac{5}{4}$ قابل قبول است.

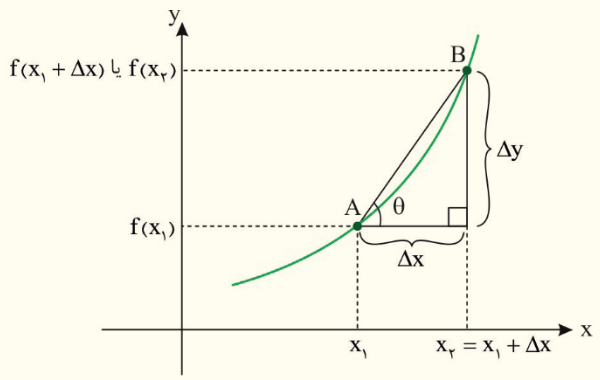
پلهٔ دوم: حال آهنگ لحظه ای تغییر را در این نقطه به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Rightarrow f'\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{1}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

درسنامه

۱- آهنگ متوسط: آهنگ متوسط تغییر تابع f، همان نسبت تغییرات عرض‌ها به تغییرات طول‌ها است. به زبان ریاضی داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

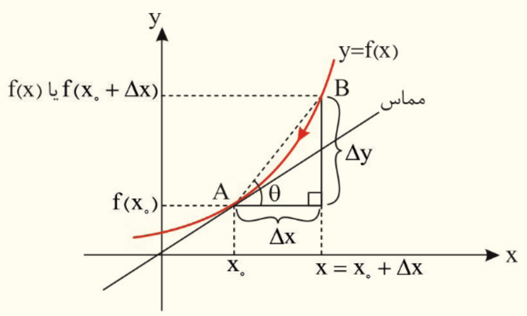


نکته آهنگ متوسط تغییر تابع f از نقطهٔ A تا B به زبان ساده همان شیب وتر AB است.

$$\text{آهنگ متوسط } f \text{ از } A \text{ تا } B=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\theta=m_{AB}$$

۲-آهنگ آنی یا لحظه‌ای: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f نسبت به متغیر x به‌صورت زیر است:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



نکته آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f نسبت به متغیر x در نقطهٔ A، به زبان ساده همان شیب خط مماس در نقطهٔ A است.